CHAPITRE 9

Vecteurs (point de vue algébrique)

Plan du chapitre

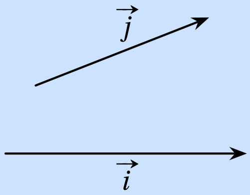
Partie I Expression dans une base

A - Coordonnées d'un vecteur dans une base

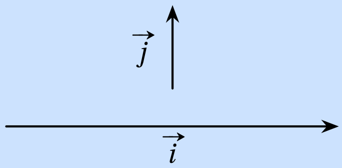
Définition 1 : Base du plan

• Une **base du plan** est un couple $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ de deux vecteurs du plan non nuls, et qui n'ont pas la même direction.

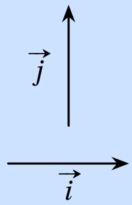
Base du plan
$\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$



Base orthogonale
$\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$



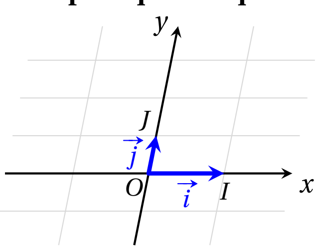
Base orthonormée
$\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$



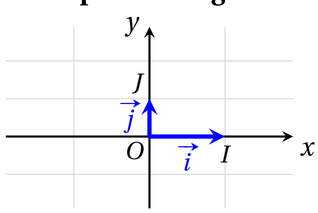
• Une base de vecteurs est **orthonormée**, lorsque les directions des deux vecteurs sont perpendiculaires et que leurs normes sont égales à une unité.

À partir d'une base du plan on peut définir un repère du plan $\left(O\,;\vec{i}, \vec{j}\right)$:

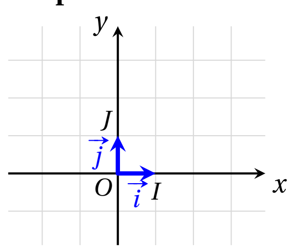
Repère quelconque



Repère orthogonal



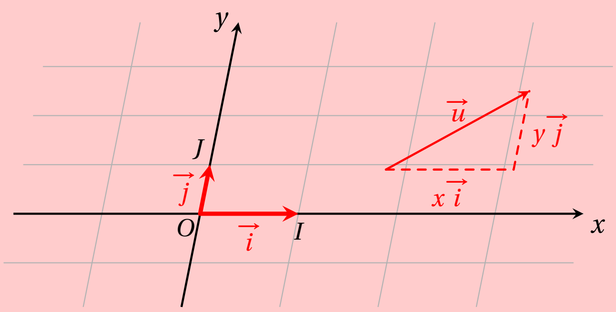
Repère orthonormal



Théorème 1 : Décomposition d'un vecteur dans une base

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base du plan.

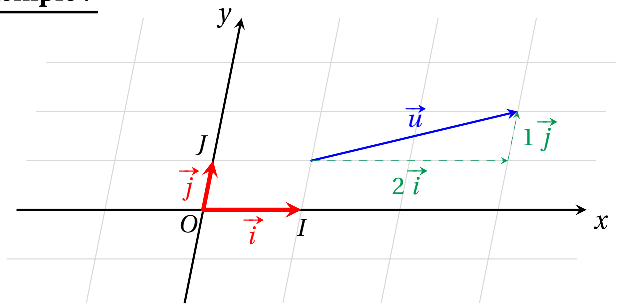
Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple de réels (x, y) tels que : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.



On dira que dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ le couple (x, y) est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et on notera :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

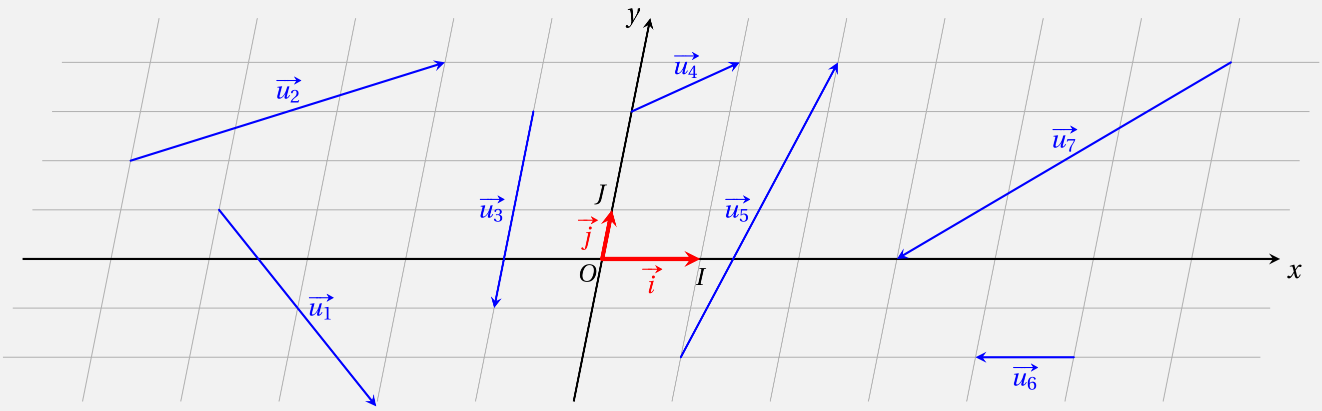
Exemple :



Dans ce cas on a alors : $\vec{u} = 2\,\vec{i} + \vec{j}$, on notera :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

À savoir faire 1 : Coordonnées de vecteurs



Déterminer les coordonnées des vecteurs représentés ci-dessus :

....

....

....

....

....

....

B - Vecteurs égaux

Propriété 1 : Égalité

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.
Autrement dit, dans une même base :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ sont égaux} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

À savoir faire 2 : Égalité ?

On exprime deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2t-4\\3t'\end{pmatrix}$ dans une même base, avec $t, t' \in \mathbb{R}$.
Déterminer, si possible, deux nombres réels t, t' tels que $\vec{u} = \vec{v}$.

....

....

....

....

....

....

C - Opérations et vecteurs

Propriété 2 : Somme

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ exprimés dans une même base du plan.

Alors les coordonnées du vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}a+a'\\b+b'\end{pmatrix}$.

Exemple :

Considérons deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ dont les coordonnées sont exprimés dans une même base.

Ainsi le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+3\\4+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

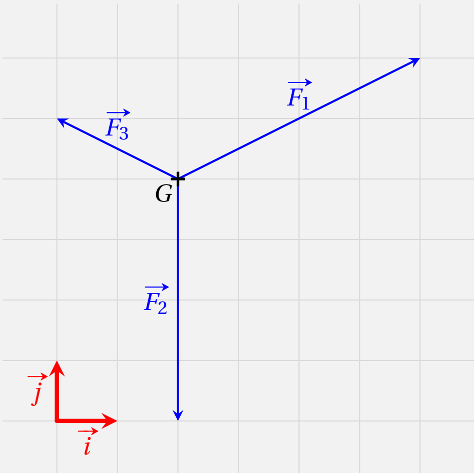
Propriété 3 : Produit par un scalaire

Soient $k\in\mathbb{R}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur dans une base du plan.

Dans cette même base du plan, on a alors $k\vec{u}\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$.

À savoir faire 3 : Opérations

En physique, on peut représenter les forces s'exerçant sur un solide par des vecteurs.
Un système est dit équilibré (c'est-à-dire qu'il ne bouge plus par rapport au référentiel terrestre) lorsque la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle.



On représente ci-dessus, dans une base orthonormée, les forces qui s'exercent sur un solide G.
Montrer que le système représenté ci-dessus est à l'équilibre.

....

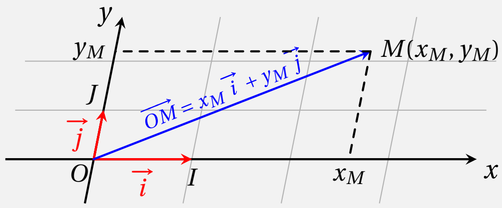
....

. . . .

D - Calculs de coordonnées

Propriété 4 : Lien entre coordonnées de point et vecteur

Soit $M(x_M, y_M)$ dans une base quelconque du plan, on a alors que le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix}$ dans ce repère.



Propriété 5 : Cas général

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

Dans la base $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Exemple :

Soient $A(-1,2)$ et $B(2,-3)$ dans une base quelconque du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées dans cette base :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dots\dots\dots\dots\\\dots\dots\dots\dots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dots\dots\\\dots\dots\end{pmatrix}$$

À savoir faire 4 : Calcul de coordonnées

Dans chacun des cas, le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

1. $A(-1,3)$, $B(-3,-2)$, $C(1,-1)$, $D(3,4)$.

. . . .

2. $A(-3,2)$, $B(3,0)$, $C(2,-4)$, $D(-5,-2)$.

. . . .

E - Norme d'un vecteur dans une base orthonormée du plan

Propriété 6 : Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ du plan on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Ainsi pour $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ on a :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Démonstration :

On a $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$, on pose : $a\,\vec{i} = \overrightarrow{AC}$ et $b\,\vec{j} = \overrightarrow{CB}$.
Ainsi $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\|\vec{u}\| = AB$.
Comme la base $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ est orthonormée, le triangle ABC est rectangle en C et on a :

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = AC = |a| \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = CB = |b|$$

En appliquant le **théorème de Pythagore**, on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2$, de plus $|a|^2 = a^2$ et $|b|^2 = b^2$.
Donc $\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2$, de plus comme $\|\vec{u}\|^2 \geq 0$ on a bien :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Pour conclure de manière assez évidente comme $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ on a alors par ce que l'on vient de démontrer :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

■

Exemple :

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ exprimé dans une base orthonormé, la norme de ce vecteur est :

$$\|\vec{v}\| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Partie II Colinéarité et propriétés

A - Vecteurs colinéaires

Définition 2 : Colinéarité

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$;
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Information : Deux vecteurs **non nuls** du plan ont même direction.
Le cas du vecteur nul est exclu car il n'a pas de direction, donc il ne peut pas avoir la même direction qu'un autre vecteur (auquel il est pas définition colinéaire).

Exemple :

- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

  On remarque que $x_{\vec{u}} = ...x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}} = ...y_{\vec{v}}$ donc $\vec{u} = ...\vec{v}$.
  Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

  On remarque que $x_{\vec{u}} = ...x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}} = ...y_{\vec{v}}$.
  Ainsi il n'existe pas de réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ et donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On a alors pour deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, exprimés dans une base quelconque du plan, que :

$$\begin{aligned}\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires } &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{u} = k\vec{v}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}\end{aligned}$$

C'est-à-dire il y a une relation de proportionnalité entre les coordonnées :

$\vec{u}$	$\vec{v}$
x	x'
y	y'

$\times k$

Comme vous l'avez vu au collège, un tableau est dit de proportionnalité si, et seulement si :

$\vec{u}$	$\vec{v}$
x	x'
y	y'

$$\boxed{xy' = yx'}$$

Ainsi vient la propriété suivante :

Propriété 7 : Condition de colinéarité

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ exprimés dans une même base sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - yx' = 0$.

Exemple :

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{48}{35}\\\frac{8}{7}\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
À première vue, il n'est pas aisé de trouver un coefficient de colinéarité. Ainsi pour répondre à cette ques-

tion utilisons la propriété précédente.

.... = ... = ... = ...

Ainsi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Définition 3 : Déterminant

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs exprimés dans une même base du plan.
Le nombre $xy' - yx'$ est appelé le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans ce même base du plan.
On le note $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ ou encore : $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}$.

À retenir : Moyen mnémotechnique

$$\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$$

À savoir faire 5 : Condition de colinéarité

Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3t\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\t^2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires?

....
....
....
....
....

B - Des propriétés pour démontrer

Propriété 8 : Alignement et parallélisme

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts.

- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ;
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

À savoir faire 6 :

Dans chacun des cas, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1. $A(3,4)$, $B(5,0)$, $C(0,5)$ et $D(3,0)$.
2. $A(2,2)$, $B(5,4)$, $C(1,4)$ et $D(-2,2)$.

....
....
....
....
....
....
....

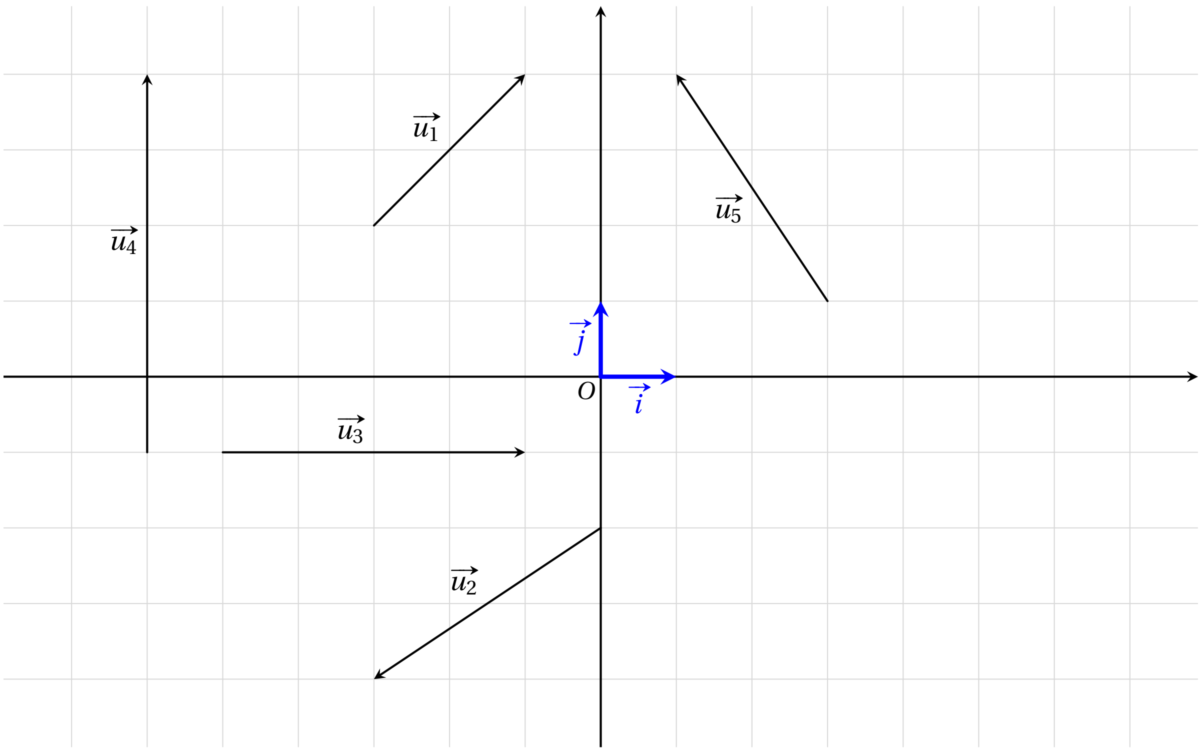
Partie III Exercices

On se placera (sauf mention contraire) tout au long de cette partie dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A - Premiers calculs

★☆☆☆☆ **EXERCICE 1** (Coordonnées)

Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$ et $\vec{u_5}$. Puis construire dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous un représentant de chacun des vecteurs suivants : $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{p}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.



★⯪☆☆☆ **EXERCICE 2** (Calcul de coordonnées)

Soient $A(1,2)$, $B(-2,5)$ et $C(-3,-4)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

★★☆☆☆ **EXERCICE 3**

Soient $A(5,-1)$, $B(1,7)$, $C(3,4)$ et $D(x,y)$.

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CD}$.

★★☆☆☆ **EXERCICE 4** (Parallélogramme)

Soient $A(-3,-2)$, $B(1,-1)$, $C(4,4)$ et $D(0,3)$. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

★★☆☆☆ **EXERCICE 5** (Parallélogramme)

On donne le point $A(-2,3)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du point B image du point A par $\vec{u}$.

★★☆☆☆ **EXERCICE 6**

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs :

1. $\vec{t_1} = \vec{u} + \vec{v}$;
2. $\vec{t_2} = \vec{v} + \vec{w}$;
3. $\vec{t_3} = -2\vec{u}$;
4. $\vec{t_4} = -2\vec{u} + 4\vec{v} - 3\vec{w}$;

★★⯪☆☆ **EXERCICE 7** ...

Soient $A(-2,-1)$, $B(3,1)$, $C(1,3)$ et $D(-4,1)$.
Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme et déterminer les coordonnées du centre de ce parallélogramme.

B - Normes

★★☆☆☆ **EXERCICE 8** ...

On donne les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Calculer la norme de chacun des vecteurs précédents.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 9** (Cercle) ...

1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $I(1,2)$ et de rayon 5. Considérons $M(5,5)$.
   Le point M appartient-il au cercle $\mathscr{C}$?
2. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $I(1,8;-3,5)$. Déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 10** (Médiatrice) ...

On donne les points $A(-1,5)$, $B(3,1)$ et $M(-5,-3)$.

1. Calculer les distances MA et MB.
2. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.
3. Expliquer pourquoi le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

C - Colinéarité

★☆☆☆☆ **EXERCICE 11** (Déterminant) ...

Dans une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$.
Calculer le déterminant entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 12** ...

Dans une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} = 2\vec{i} + \left(1+\sqrt{5}\right)\vec{j}$ et $\vec{v} = \left(1+\sqrt{5}\right)\vec{i} - 2\vec{j}$.
Calculer le déterminant entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Que peut-on en déduire sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 13** ...

Dans une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\m\end{pmatrix}$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le déterminant entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Pour quelle valeur de m les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

★★⯪☆☆ **EXERCICE 14** (Alignement) ...

Dans une base orthonormé, on donne les points $A(2,3)$, $B(5,7)$ et $C(-7,-9)$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

★★⯪☆☆ **EXERCICE 15** (Segment) ...

Dans une base orthonormé, on donne les points $A(-1,2)$, $B(5,4)$ et $C(8,5)$. Après avoir calculer les distances AB, BC et AC. Démontrer que le point $B \in [AC]$.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 16** ....

Dans une base orthonormé, on donne les points $A(-1,4)$, $B\left(\frac{1}{2},1)\right)$, $C(3,-4)$, $D(-1,0)$ et $E(0,-2)$.

1. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Démontrer que les droites $(AB)//(DE)$.

★★★⯪☆ **EXERCICE 17** (Bilan) ....

Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. On considère les points $A(2,-t)$, $B(t+2,1)$, $C(1,2)$ et $D(t,t)$.
   Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $(AB)//(CD)$.
2. On considère les points $E(2,2)$, $F(t,4)$ et $G(10,t)$.
   Déterminer les valeurs de t pour lesquelles E, F et G sont alignés.
3. On considère les points $H(-2,0)$, $I(2t,t+1)$ et $J(4t,2t+1)$.
   Démontrer que, quelle que soit la valeur de t, les points H, I et J sont alignés.