**CHAPITRE 8**

# Probabilités

## Plan du chapitre

# Partie I Probabilité sur un ensemble fini

## A - Définitions

**Définition 1 :**

- En théorie des probabilités, on appelle **événement** un fait ou un résultat qui peut (ou ne peut pas) être réalisé à la suite d'une **expérience aléatoire**.
- Chaque événement est réalisé par des **issues**, on les notera parfois $\omega$ (oméga minuscule).
- Un **événement** est une ensemble d'issue possible d'une expérience aléatoire.
- L'ensemble des issues possibles pour une expérience aléatoires données s'appelle l'**univers des possibles** (ou simplement **univers**) on le notera :

$$\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}}$$

**Exemple :**

- Un lancer de dé équilibré à six faces est une **expérience aléatoire** ;
- Lors de cette expérience aléatoire, 4 est une **issue possible** et 7 est une **issue impossible** ;
- L'**univers des possibles** de notre expérience aléatoire : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on pourra noter : $\omega_1 = 1, ...$
- L'**événement** noté $A$ : « Obtenir un nombre pair » est réalisé par les issues $\omega_2 = 2, \omega_4 = 4$ et $\omega_6 = 6$ on pourra noter que $A = \{2, 4, 6\}$ ;
- L'évenement $B$ : « Obtenir un nombre plus grand que 7 » est un **événement impossible** en effet aucune des issues possibles dans notre univers $\Omega$ ne réalise l'événement $B$.

**Information :** Dans la définition précédente, $n$ désigne ici le nombre d'issues possible pour notre expérience aléatoire. On se limitera à l'étude des expériences aléatoires ayant un nombre fini d'issues possibles.

**À savoir faire 1 : Décrire une expérience aléatoire**

Considérons l'expérience aléatoire tirer une lettre dans mon nom : « `DESORGERIS` ».

1. Donner issue possible et une issue impossible de cette expérience aléatoire.

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

2. Décrire l'univers des possibles $\Omega$ de cette expérience aléatoire.

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

3. Considérons l'événement $A$ : « Tirer une voyelle » associé à notre expérience aléatoire.
   Décrire l'univers des possibles de notre expérience aléatoire.

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

4. Considérons l'événement $B$ : « Tirer une lettre présente dans le prénom `Paul` »
   Décrire l'univers des possibles de notre expérience aléatoire.

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

**Définition 2 : Probabilité**

On appelle **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ une fonction :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \Omega & \longrightarrow & [0,1] \\ & \omega_k & \longmapsto & \mathbb{P}(\omega_k) \end{array}$$

qui à chaque issue lui associe un réel compris entre 0 et 1 et tel que la somme des images de chacune des issues de notre univers $\Omega$ est égale à 1.

$$\mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2) + \cdots + \mathbb{P}(\omega_n) = 1$$

On dira alors que $\mathbb{P}(\omega_k)$ est la **probabilité** de l'issue $\omega_k$ dans l'expérience aléatoire d'univers $\Omega$.

**Exemple :**

En reprenant l'expérience d'un lancer de dé équilibré à six faces décrit dans l'exemple précédent.

- On a $\mathbb{P}(4) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(7) = 0$
- Comme $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}$

  On peut définir :

  $$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \Omega & \longrightarrow & [0,1] \\ & \omega & \longmapsto & \mathbb{P}(\omega) \end{array}$$

  de plus comme :

  $$\mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

  On peut dire que $\mathbb{P}$ définie une probabilité sur notre univers $\Omega$.

**Définition 3 : Probabilité d'un événement**

La **probabilité d'un événement** $A$, notée $\mathbb{P}(A)$, est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement.

**Exemple :**

En reprenant l'expérience d'un lancer de dé équilibré à six faces.
Comme l'événement $A$ : « Obtenir un nombre pair » est tel que $A = \{2, 4, 6\}$ . On a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

**À retenir : Événements particuliers**

En particulier $\Omega$ et $\emptyset$ sont deux événements, le premier est appelé événement certain et on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ tandis que le second est appelé événement impossible et on a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

**À savoir faire 2 : Probabilité d'événements**

En reprenant l'expérience aléatoire du **À savoir 1**.
Déterminer la probabilité de l'événement $A$ puis de l'événement $B$.

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## B - Équiprobabilité

**Définition 4 : Cardinal**

Soit $E$ un ensemble fini.
On appelle **cardinal** de $E$ le nombre d'éléments de $E$. Le cardinal de $E$ sera noté $\text{Card}\,(E)$.

**Exemple :**

- Pour l'expérience aléatoire d'un lancer de dé équilibré à six faces on a $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$, on a alors :

$$\text{Card}\,(\Omega)_1 = 6$$

- Pour l'expérience aléatoire du **À savoir faire 1** on a $\Omega_2 = \{\mathtt{D},\mathtt{E},\mathtt{S},\mathtt{O},\mathtt{R},\mathtt{G},\mathtt{I}\}$, on a alors :

$$\text{Card}\,(\Omega)_2 = 7$$

**Définition 5 : Équiprobabilité**

On appelle **situation équiprobabilité** une expérience où tous les issues d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$ ont la même probabilité d'être réalisés.

**Exemple :**

- L'expérience aléatoire d'un lancer de dé équilibré à six faces est une situation d'équiprobabilité car :

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \cdots = \mathbb{P} = \frac{1}{6}$$

- L'expérience aléatoire du **À savoir faire 1** n'est pas une situation d'équiprobabilité car :

$$\mathbb{P}(\mathtt{D}) = \frac{1}{10} \neq \frac{2}{10} = \mathbb{P}(\mathtt{E})$$

**Propriété 1 : Situation d'équiprobabilité**

Considérons une expérience aléatoire d'univers des possibles $\Omega$, suivant une situation d'équiprobabilité et $A$ un événement de cette expérience aléatoire.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)}$$

**À retenir :** Dans une situation d'équiprobabilité, on pourra retenir que la probabilité d'un événement $A$ est :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

**À savoir faire 3 : Utiliser l'équiprobabilité**

On considère l'expérience de tirer une boule dans une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10.

1. Donner l'univers des possibles $\Omega$ de cette expérience aléatoire.

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

2. Justifier que cette expérience aléatoire suit une situation d'équiprobabilité.

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

3. Considérons l'événement $A$ : « Obtenir un multiple de 3 ».
   Déterminer $\mathbb{P}(A)$.

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

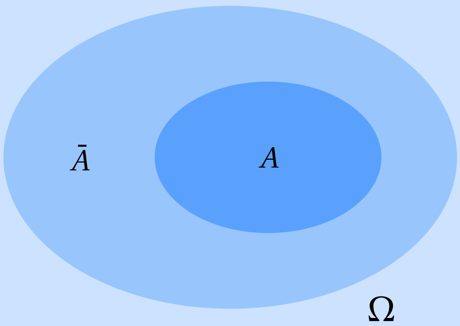
   ..........................................................................................................

# Partie II Opérations sur les événements

## A - Événement contraire

**Définition 6 : Événement contraire**

Soit $A$ un événement d'un expérience aléatoire d'univers $\Omega$.
On appelle **événement contraire** de $A$ l'événement, noté $\overline{A}$, réalisé par les issues ne réalisant pas $A$.




**À savoir faire 4 : Événement contraire**

En considérant l'expérience aléatoire du **À savoir faire 3**.
On rappelle que l'événement $A$ : « Obtenir un multiple de 3 ».

1. Décrire l'événement $\overline{A}$.

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

2. Donner $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

3. Considérons l'événement $B$ : « Obtenir un nombre pair ».
   Décrire en une phrase $\overline{B}$.

   ..........................................................................................................

   ..........................................................................................................

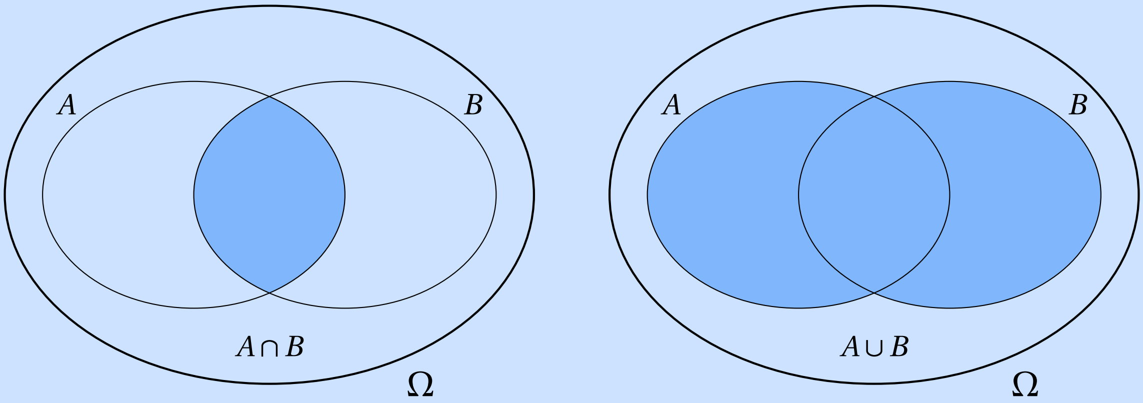
   ..........................................................................................................

## B - Union et intersection

**Définition 7 : Union et intersection**

Soient $A$ et $B$ deux événement d'une aléatoire d'univers $\Omega$.

- L'événement $\boldsymbol{A \cap B}$ est l'événement réalisé par les issues réalisant $A$ **et** $B$.
- L'événement $\boldsymbol{A \cup B}$ est l'événement réalisé par les issues réalisant $A$ **ou** $B$.




**Exemple :**

Dans l'expérience d'un lancer de dé équilibré à six faces, en considérant les événements $A$ : « Obtenir un nombre pair » et $C$ : « Obtenir un nombre plus petit que 5 ». On a alors :

$$A \cap C = \{2, 4\}$$

et

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

**À savoir faire 5 : Union et intersection**

En reprenant l'expérience aléatoire du tirage d'une boule dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10.

On rappelle que les événements $A$ : « Obtenir un multiple de 3 » et $B$ : « Obtenir un nombre pair ».

1. Décrire les événements $A \cup B$ et $A \cap B$.

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

2. Donner $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

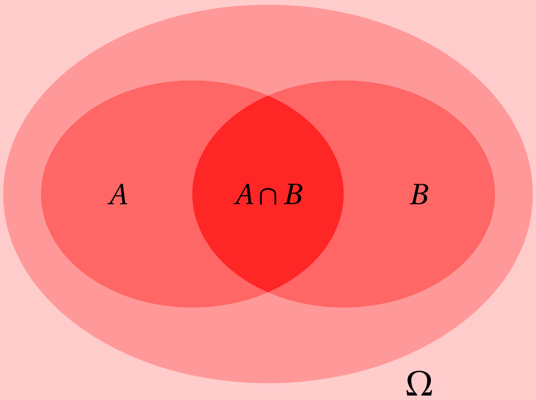
   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

**Théorème 1 :**

Soient $A$ et $B$ deux événements d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$.

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$




**À savoir faire 6 : Appliquer la formule de l'union**

En reprenant le **À savoir faire 5**, calculer d'une autre manière $\mathbb{P}(A\cup B)$.

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

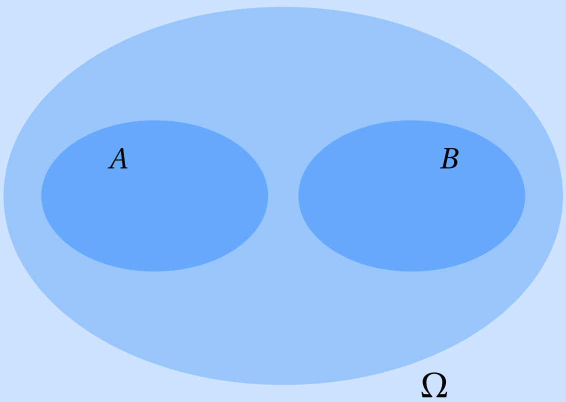
**Propriété 2 : Probabilité de l'événement contraire**

Soit $A$ un événement d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$.

- On a alors : $\Omega = A\cup\overline{A}$ et $A\cap\overline{A}=\emptyset$ ;
- La probabilité de l'événement contraire de $A$ est : $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=1-\mathbb{P}(A)$

**Définition 8 : Événements incompatibles**

Considérons deux événements $A$ et $B$ d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$.
On dit que $A$ et $B$ sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.



**À savoir faire 7 : Événements incompatibles**

En reprenant l'expérience aléatoire du tirage de boule dans une urne, donner deux événements incompatibles.

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**Propriété 3 :**

Soient $A$ et $B$ deux événements incompatibles d'une expérience aléatoire.

- On a alors $A \cap B = \emptyset$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
- Les événements $A$ et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles.

# Partie III Exercices

★⯪☆☆☆ **Exercice 1** (Tirage)

On considère l'expérience aléatoire suivante : « on tire au hasard une boule dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10 ». Considérons les expériences aléatoires suivantes :

- $A$ : « L'issue obtenue est un nombre pair » ;
- $B$ : « L'issue obtenue est supérieure ou égale à 8 » ;
- $C$ : « L'issue obtenue est strictement inférieure à 3 ».

1. Donner l'univers des possibles $\Omega$ de cette expérience aléatoire.
2. Lister les issues réalisant chaque événement.
3. Déterminer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
4. Lister les issues réalisant chacun des événements suivants :

(a) $\overline{A}$ (b) $\overline{B}$ (c) $A \cap B$ (d) $A \cap C$ (e) $A \cup B$ (f) $A \cup C$

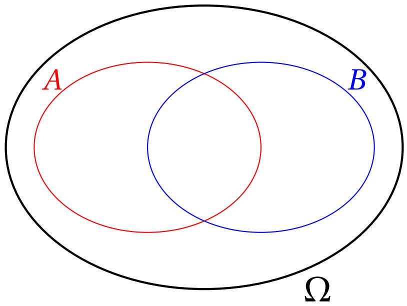
★☆☆☆☆ **Exercice 2** (Mélange d'événements)

Considérons $E = \{1,2,3,4,5\}$ l'univers d'une expérience aléatoire et deux événements de cette expérience $A = \{2,5\}$ et $B = \{3,4,5\}$. Lister alors les issues qui réalisent chacun des événements suivants :

1. $\overline{A}$ 2. $A \cap B$ 3. $A \cup B$ 4. $A \cup \overline{B}$ 5. $\overline{A \cap B}$ 6. $\overline{A \cup B}$

★★☆☆☆ **Exercice 3** (Diagramme et événements)

Considérons deux événements $A$ et $B$ d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$.

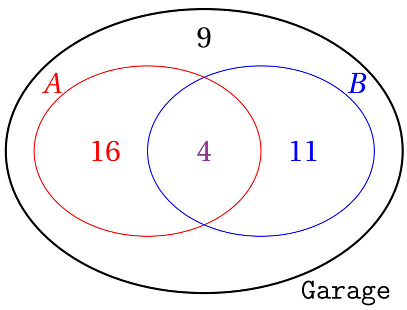



Réaliser la figure ci-dessus et colorier la partie représentant les événements suivants :

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $\overline{A \cap B}$
4. $\overline{A \cup B}$
5. $\overline{A} \cap B$
6. $\overline{A} \cup B$
7. $\overline{A} \cap \overline{B}$
8. $\overline{A} \cup \overline{B}$

★★☆☆☆ **Exercice 4** (Voitures)

Le diagramme ci-dessous présente le nombre de voitures d'un garage selon le type de moteur.
$A$ (respectivement $B$) est l'ensemble des voitures pouvant fonctionner à l'électricité (respectivement à l'essence).



1. Compléter le tableau suivant par les effectifs qui conviennent.

| | $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|---|
| $B$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $\overline{B}$ | $\dots$ | $\dots$ |

2. On choisit au hasard la fiche d'une voiture de ce garage et on considère les événements :
   - $H$ : « La voiture est hybride » ;
   - $I$ : « La voiture est uniquement électrique ».

   Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

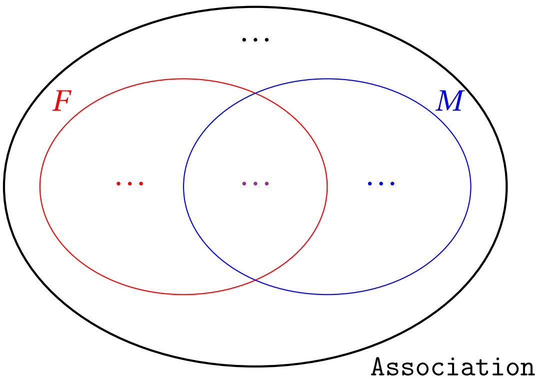
   (a) $H$ (b) $I$ (c) $H \cup I$ (d) $\overline{H}$ (e) $\overline{I}$ (f) $H \cap \overline{B}$

★★⯪☆☆ **EXERCICE 5** (Médecin) ........................................................................

Le tableau ci-dessous donne la répartition des membres d'une association humanitaire.

| | Femme ($F$) | Homme ($\overline{F}$) | **Total** |
|---|---|---|---|
| Médecin ($M$) | 5 | 4 | **4** |
| Autre ($\overline{M}$) | 16 | 19 | **35** |
| **Total** | **21** | **23** | **44** |

1. Compléter le diagramme suivant par les effectifs qui conviennent.




2. On choisit au hasard la fiche de l'un des membres. Déterminer le nombre d'issues, puis la probabilité de chacun des événements suivants :

   (a) $F$ (b) $M$ (c) $\overline{F}$ (d) $F \cap M$ (e) $F \cup M$

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 6** (Dé à 20 faces) ........................................................................

On lance un dé de 20 faces, numérotées de 1 à 20. On lance le dé et on note le numéro de la face en contact avec le sol. On note les éléments suivants :

- $A$ : « L'issue obtenue est un nombre pair » ;
- $B$ : « L'issue obtenue est un multiple de 3 » ;
- $C$ : « L'issue obtenue est inférieure ou égal à 8 ».
- $D$ : « L'issue obtenue est strictement supérieure à 12 ».

1. Déterminer $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(D)$.
2. Définir par une phrase, puis calculer la probabilité des événements suivants :

(a) $A \cap B$ (b) $A \cap C$ (c) $B \cup C$

3. Déterminer $\mathbb{P}(C \cap D)$.

★★★☆☆ **EXERCICE 7** (Jetons)

Un sac contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire au hasard un jeton.
On considère alors les événements suivants :

- $A$ « le numéro du jeton est impair » ;
- $B$ « le numéro du jeton est un multiple de 5 ».

1. Déterminer les issues réalisant chacun des deux événements précédents.
2. Décrire sous forme d'un ensemble d'issues, les événements suivants :

(a) $A \cap B$ (d) $\overline{A \cap B}$ (g) $\overline{A} \cup B$
(b) $\overline{A}$ (e) $\overline{A \cup B}$ (h) $\overline{A} \cap \overline{B}$
(c) $A \cup B$ (f) $\overline{A} \cap B$ (i) $\overline{A} \cup \overline{B}$

3. Certains événements sont-ils identiques ?
4. Déterminer $\mathbb{P}\left(\overline{A \cap B}\right)$ et $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$.

★★★⯪☆ **EXERCICE 8** (Deux lancers)

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, puis une pièce équilibrée dont les faces sont numérotées 1 et 2. On note les numéros obtenus.

1. Représenter cette expérience aléatoire sous la forme d'un arbre.
2. Donner la probabilité associée à chaque issue de cette expérience aléatoire.

★★★★☆ **EXERCICE 9** (Deux lancers successifs)

On lance de deux équilibrés à six faces l'un après l'autre. On note dans l'ordre les numéros obtenus.

1. Donner toutes les issues possibles à cette expérience aléatoire.
2. Donner la probabilité associée à chaque issue de cette expérience aléatoire

★★★★☆ **EXERCICE 10** (Deux lancers simultanées)

On lance de deux équilibrés à six faces simultanément. On note les numéros obtenus.

1. Donner toutes les issues possibles à cette expérience aléatoire.
2. Donner la probabilité associée à chaque issue de cette expérience aléatoire