

Point de vue géométrie des vecteurs

Plan du chapitre

I Vecteurs du plan	2
A - Notion de direction et de sens	2
B - Translation et vecteur	3
C - Vecteurs égaux	4
II Somme de deux vecteurs	6
A - Propriétés	6
B - Relation de Chasles	7
C - Opposé	7
III Produit d'un vecteur par un scalaire	9
A - Propriétés	9
B - Colinéarité	9
C - Droites et alignements	10
IV Exercices	12
A - Image	12
B - Caractérisation	12
C - Vecteurs égaux	13
D - Somme de vecteurs	14
E - Colinéarité et produit par un réel	17

Introduction

Les vecteurs remontent à l'antiquité, le verbe *vehere* signifie transporter. Un vecteur est un objet qui transporte. Les vecteurs au sens mathématiques, sont partout autour de nous. En sciences physiques, ils décrivent de nombreux phénomènes (la mécanique, l'électromagnétisme...)

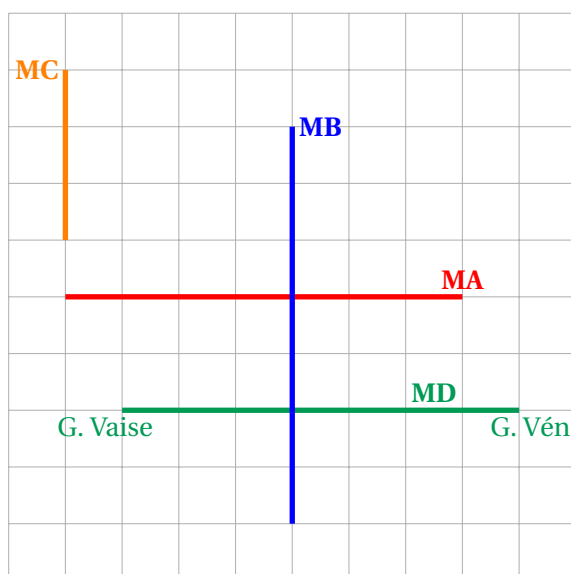
Voilà comment on introduira un nouveau chapitre d'une importance toute particulière.

Partie I Vecteurs du plan

A - Notion de direction et de sens

Voyons sur un exemple visuel la différence entre l'usage des notions de direction et de sens dans la vie de tous les jours et en mathématiques.

Si on considère toutes les lignes de métro de Lyon comme étant des droites, que je représente ci-dessous.



En termes de **direction**, en mathématiques on dira que :

- Les lignes **A** et **D** définissent une même **direction**, elles définissent la direction *horizontale* : Est-Ouest.
- Les lignes **B** et **C** définissent une même **direction**, elles définissent la direction *verticale* : Nord-Sud

En termes de **sens**, en mathématiques on dira que :

- Le **sens** de parcourt du **métro D** allant de la Gare de Vénissieux vers Gare de Vaise, définit un sens.
- Le **sens** de parcourt du **métro D** allant de la Gare de Vaise vers Gare de Vénissieux, définit le sens contraire.

Erreur fréquente : Usage

L'usage des termes **direction** et **sens** n'est pas le même dans la vie de tous les jours qu'en mathématiques. Dans la vie de tous les jours vous diriez par exemple : « Je prend le métro *D direction gare de Vénissieux* », alors qu'en mathématiques ce que vous appelez « *direction gare de Vénissieux* » s'appelle un **sens**.

On peut alors définir rigoureusement ces deux notions :

Définition 1 : Direction/Sens

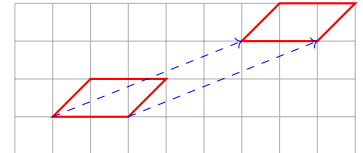
- Une droite définit une **direction**;
- Deux droites parallèles définissent la même **direction**;

- Sur une droite on peut définir deux sens;
- Sur toutes les droites d'une même direction (qui sont donc toutes parallèles entre elles), il y a seulement deux direction.

B - Translation et vecteur

Définition 2 : Translation

Transformer une figure par **translation** revient à la faire glisser d'une longueur donnée, le long d'une droite donnée et dans un sens donné.



Définition 3 : Vecteur

Soient A et B deux points du plan.

On appelle **vecteur** \vec{AB} la translation qui transforme A en B .

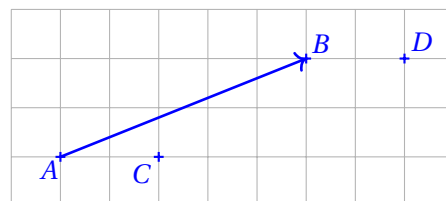
Lorsque A et B sont deux points distincts, le vecteur \vec{AB} est caractérisé par :

- **sa direction** : celle de la droite (AB) ou de toute droite parallèle à (AB) ;
- **son sens** : de A vers B ;
- **sa norme** : la longueur du segment $[AB]$, notée $\|\vec{AB}\|$.

Information : Ces trois données encodent entièrement un vecteur. C'est-à-dire que nous avons vu que chaque vecteur possède des caractéristiques qui lui sont propres, on peut considérer que ces trois données forment la carte d'identité d'un vecteur.

Exemple :

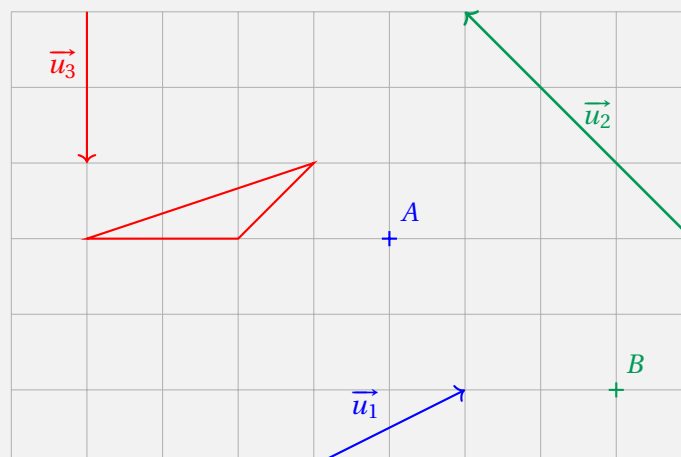
Ici nous avons représenté graphiquement par une flèche le vecteur \vec{AB} , de plus le point D est l'image du point C par le vecteur \vec{AB} .



À savoir faire 1 : Image par un vecteur

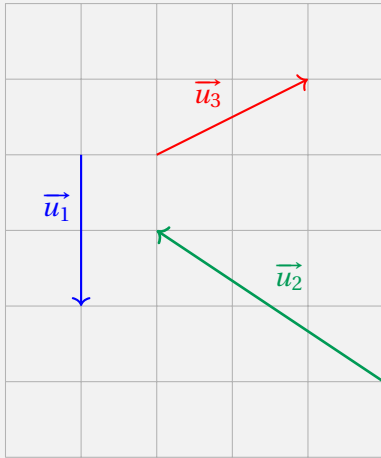
Tracer l'image :

- de A par \vec{u}_1
- de B par \vec{u}_2
- du triangle CDE par \vec{u}_3



✂ À savoir faire 2 : Calcul de norme

Déterminer la norme de chaque vecteur représenté ci-dessous



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 4 : Vecteur nul

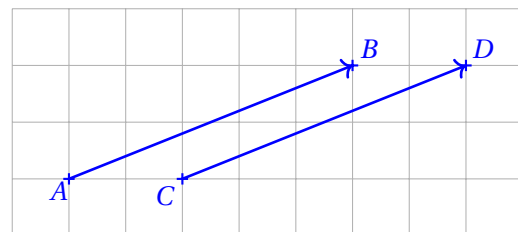
Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est le vecteur qui transforme un point en lui-même (il ne fait rien). Il n'a ni direction, ni sens et sa norme est égale à 0.

C - Vecteurs égaux

De manière assez évidente deux vecteurs sont égaux s'ils sont la même translation.

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, il est clair que les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont deux vecteurs égaux étant donné que les translations qui transforment A en B est la même que celle transformant C en D .



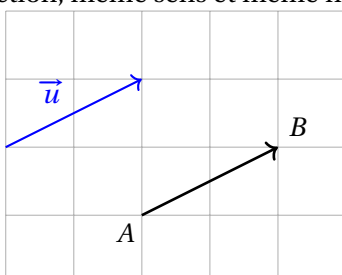
Définition 5 : Vecteurs égaux

Soient A, B, C et D quatre points du plan.
L'égalité : $\vec{AB} = \vec{CD}$ signifie que D est l'image de C par la translation, \vec{AB} .

💡 À retenir : Représentation

On vient de voir que les deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont deux vecteurs égaux. Il s'agit de deux **représentants** d'un même vecteur.

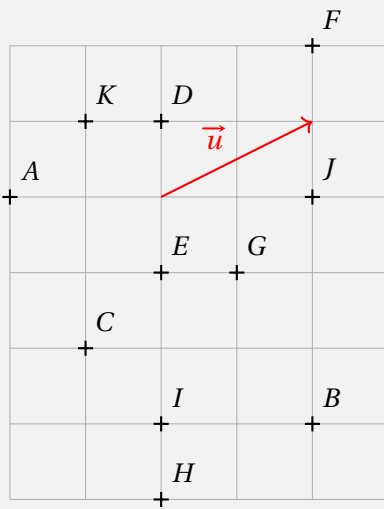
Il faut retenir qu'un vecteur possède une infinité de représentants, dans le plan tous les vecteurs ayant même direction, même sens et même norme représente le même vecteur.



Le vecteur \vec{AB} est un représentant du vecteur \vec{u} . On peut même dire qu'il est le représentant du \vec{u} d'origine A et d'extrémité B .

À savoir faire 3 : Vecteurs égaux

À partir des points du plan suivant, donner les vecteurs égaux à \vec{u}



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nous avons vu précédemment qu'un vecteur possède une carte d'identité à l'aide de :

- sa **direction**
- son **sens**
- sa **norme**

il est donc évident que deux vecteurs sont égaux si ils ont la même carte d'identité.

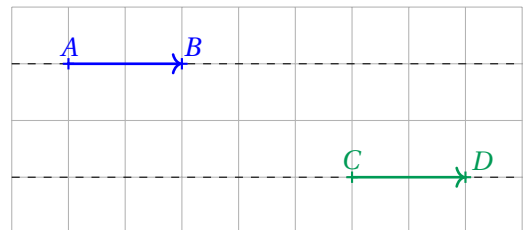
Propriété 1 : Égalité

Deux vecteurs sont **égaux** si, et seulement si, ils ont même direction, même sens et même norme.

Exemple :

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égaux car :

- Il est clair qu'ils ont la même direction car $(AB) \parallel (CD)$;
- Ils ont même sens;
- Ils ont même norme égale à 2.



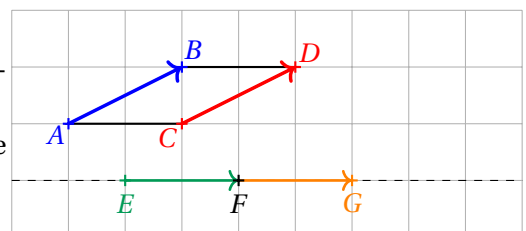
Théorème 1 : Figures géométriques

- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, le quadrilatère $ABDC$ est un **parallélogramme** (éventuellement aplati) ;
- $\vec{AB} = \vec{BC}$ si, et seulement si, B est le milieu du segment $[AC]$.

Exemple :

Nous avons : $\vec{AB} = \vec{CD}$ donc on peut affirmer que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus il est clair que $\vec{EF} = \vec{FG}$ donc on peut affirmer F est le milieu du segment $[EG]$.



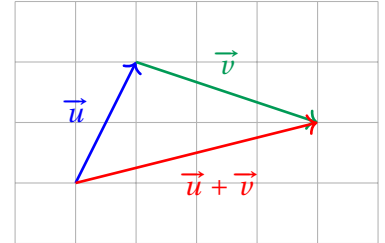
Partie II Somme de deux vecteurs

A - Propriétés

Après avoir défini la notion de vecteur puis l'égalité de deux vecteurs et le vecteur nul, il est naturel de voir ajouter deux vecteurs entre eux.

Définition 6 : Somme de deux vecteurs

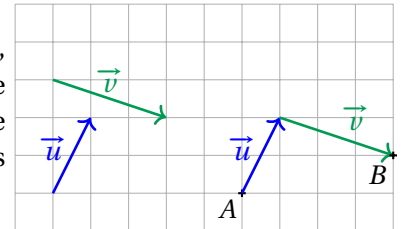
La **somme de deux vecteurs** \vec{u} et \vec{v} , que l'on notera $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur associé à la translation obtenue par l'enchaînement de la translation de vecteur \vec{u} suivie de la translation de vecteur \vec{v} .



À retenir : Pour construire la somme $\vec{u} + \vec{v}$, on met des représentants des deux vecteurs bout à bout et on considère le vecteur allant de l'origine du premier vecteur à l'extrémité du second vecteur.

Exemple :

Si on souhaite construire l'image du point A par le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$, nous devons à partir du point A mettre bout à bout le vecteur \vec{u} puis le vecteur \vec{v} . L'image de A par le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est donc le point, que l'on notera B , qui est l'extrémité du vecteur \vec{v} une fois les deux vecteurs mis bout à bout.



À savoir faire 4 : Somme de vecteurs

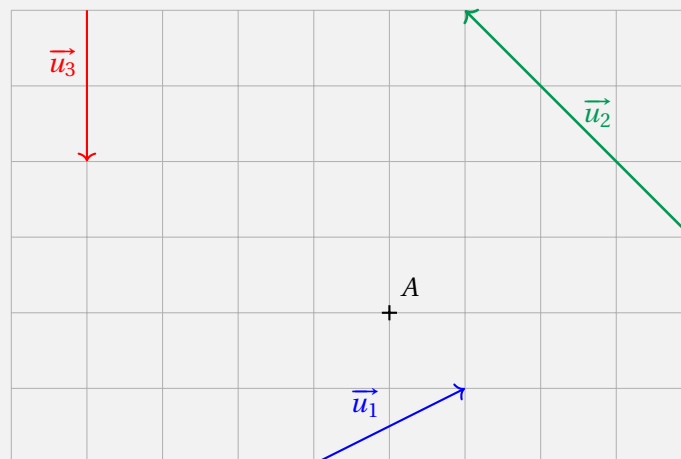
Construire l'image du point A par le vecteur :

• $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

• $\vec{u}_1 + \vec{u}_3$

• $\vec{u}_2 + \vec{u}_3$

• $\vec{u}_3 + \vec{u}_2$



Que remarque-t-on pour l'image de A par $\vec{u}_2 + \vec{u}_3$ et $\vec{u}_3 + \vec{u}_2$?

Propriété 2 : Commutativité

On peut sommer les vecteurs dans l'ordre que l'on veut :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

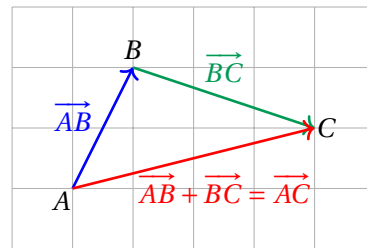
B - Relation de Chasles

Si cette fois ci, nous considérons des représentants avec des origines et des extrémités donnés la somme de deux vecteurs possède une relation bien utile :

Propriété 3 : Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan,

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



⚠ Attention : Inégalité triangulaire

L'égalité précédente est vraie uniquement pour des vecteurs, elle n'est pas vraie pour les longueurs. Nous n'avons pas :

~~$$\|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\| = \|\vec{AC}\|$$~~

En effet il est assez évident que :

$$\|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\| \geq \|\vec{AC}\|$$

nous appelons cette inégalité, l'**inégalité triangulaire**

✂ À savoir faire 5 : Relation de Chasles

Simplifier les écritures vectorielles suivantes :

1. $\vec{AD} + \vec{DC} = \dots\dots\dots$
2. $\vec{BA} + \vec{DB} = \dots\dots\dots$
3. $\vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FG} = \dots\dots\dots$
4. $\vec{HG} + \vec{EF} + \vec{GE} + \vec{FG} + \vec{GH} = \dots\dots\dots$

🔥 Point chaud : Égalité

Comme depuis le début de l'année il ne faudra pas oublier d'apprendre l'égalité dans les deux sens.

- (→) De droite à gauche il nous permet de **simplifier** les expressions vectorielles;
- (←) De gauche à droite il nous permet de faire rentrer une lettre pour **scinder** en deux notre vecteur.

✂ À savoir faire 6 : Scinder

Montrer que pour tous points A, B, C et D du plan, nous avons : $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

.....

C - Opposé

Après avoir défini la somme de deux vecteurs et le vecteur nul, nous allons chercher à définir le vecteur qui sommé à \vec{u} nous donne le vecteur nul : $\vec{0}$.

De la même manière que pour les nombres nous allons définir la notion de vecteur opposé.

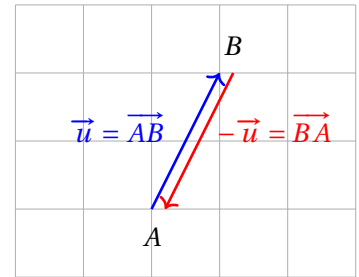
Définition 7 : Opposé

L'**opposé** d'un vecteur \vec{u} est un vecteur, que l'on notera $-\vec{u}$, c'est le vecteur qui ajouté à \vec{u} possède une somme égale au vecteur nul $\vec{0}$.

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Comme $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$, on a alors :

$$-\vec{AB} = \vec{BA}$$

**Propriété 4 : Caractéristiques**

Soit \vec{u} un vecteur du plan, on a que l'opposé du vecteur \vec{u} est le vecteur de :

- même direction que \vec{u} ;
- sens opposé à \vec{u} ;
- même norme que \vec{u}

Définition 8 : Soustraction

On définit la **soustraction** entre deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} par :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

À savoir faire 7 : Parallélogramme

Soient $ABCD$ un parallélogramme et M un point quelconque du plan.

Démontrer que $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} = \vec{0}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

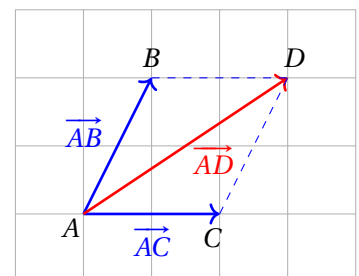
.....

Propriété 5 : Règle du parallélogramme

Soient A, B et C trois points du plan,

La somme des vecteurs $\vec{AB} + \vec{AC}$ est le vecteur d'origine A et d'extrémité le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$



Partie III Produit d'un vecteur par un scalaire

A - Propriétés

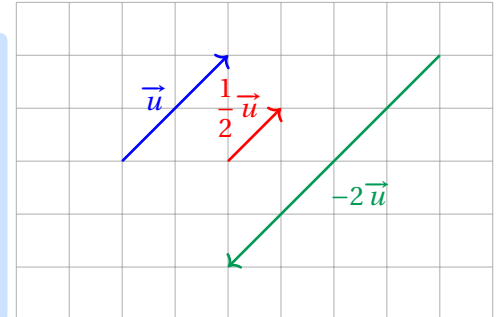
En géométrie vectorielle, on nomme par **scalaire** les nombres réels qui multiplie un vecteur.

Définition 9 : Produit d'un vecteur par un scalaire

Soit \vec{u} un vecteur et k un nombre réel.

On définit le **produit du vecteur \vec{u} par le réel k** , par le vecteur, noté $k\vec{u}$:

- de **même direction** que \vec{u} ;
- de même sens que \vec{u} si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$;
- de norme égale à : $\begin{cases} k\|\vec{u}\| & \text{si } k > 0 \\ -k\|\vec{u}\| & \text{si } k < 0 \end{cases}$



⚠ Attention : Norme

Si le scalaire k est négatif, on change simplement la taille du vecteur et son sens mais la norme elle reste **positive** c'est une distance

📌 Information : Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$

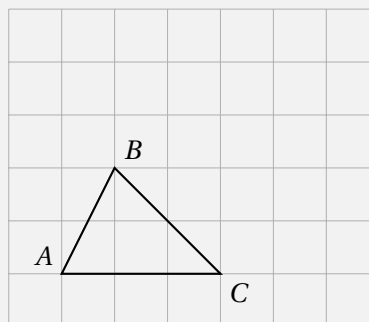
Propriété 6 : Distributivité

Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs et k, k' deux réels, on a alors :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

✂ À savoir faire 8 : Vecteurs et scalaire

Placer les points D et E tels que $\vec{CD} = 2\vec{AB}$ et $\vec{BE} = -\frac{1}{3}\vec{AC}$



B - Colinéarité

Définition 10 : Colinéarité

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits **colinéaire** s'il existe un réel k tel $\vec{v} = k\vec{u}$.

Deux vecteurs non nuls sont donc colinéaires s'ils ont la même **direction**.

💡 À retenir : Parallélisme

La notion de **colinéarité** formalise ce que vous auriez envie d'appeler « deux vecteurs parallèles ».

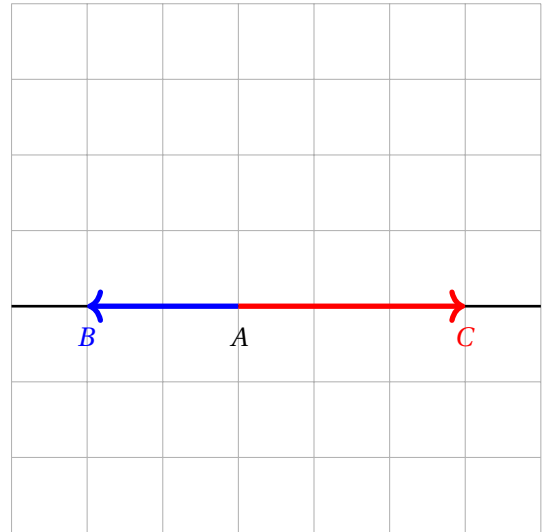
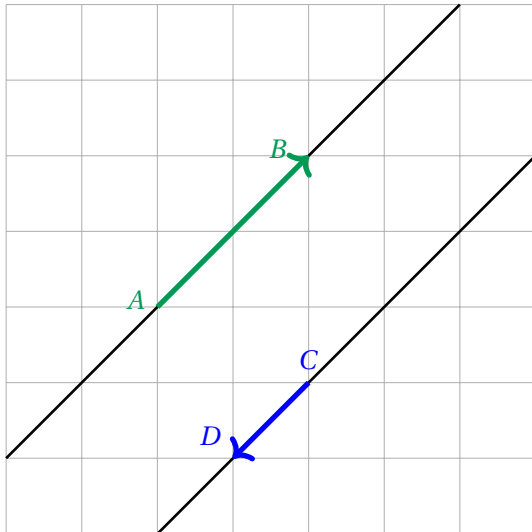
On ne dira pas « deux vecteurs parallèles » mais plutôt **vecteurs colinéaires**.

C - Droites et alignements

Théorème 2 : Parallélisme et alignement

Soient A, B, C et D quatre points du plan :

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.
- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.



À savoir faire 9 : Parallélismes et alignements

1. Soit ABC un triangle. Considérons les points P et R tels que : $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ et $\vec{AR} = 2\vec{AB} + 2\vec{AC}$.

(a) Montrer que $\vec{AR} = 3\vec{AP}$

.....

.....

.....

.....

(b) Que peut-on en déduire pour les points A, R et P ?

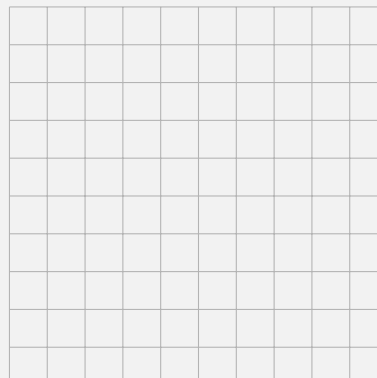
.....

.....

.....

2. Soit ABC un triangle. Considérons les points M et N tels que : $\vec{AC} = -2\vec{AM}$ et $\vec{CN} = 3\vec{AB}$.

(a) Placer les points M et N



(b) Montrer que les points B, M et N sont alignés.

.....

.....

.....

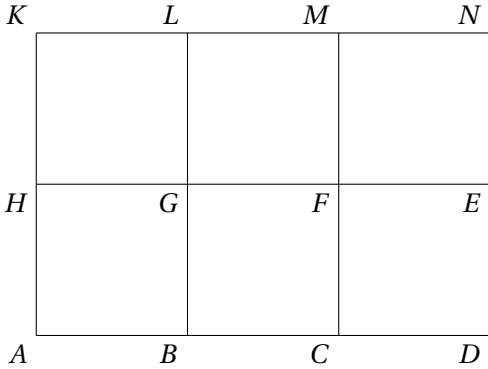
.....

Partie IV Exercices

A - Image

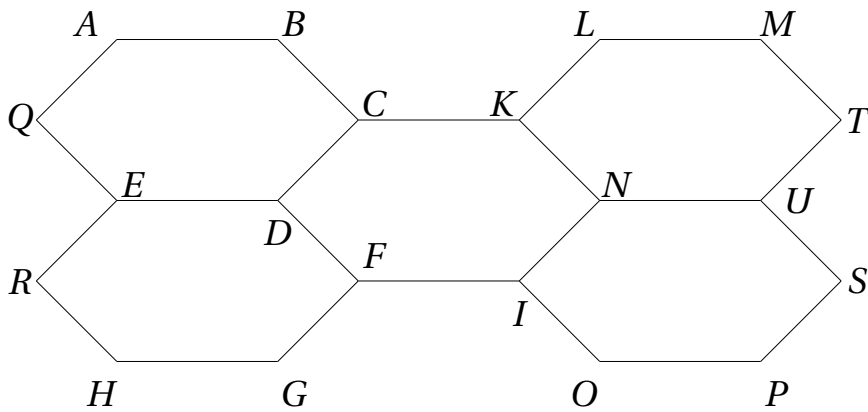
★★☆☆☆ EXERCICE 1 (Translation) (v)

Considérons six carrés juxtaposés. Sans justifier, donner l'image de :



- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. B par \vec{GF} | 5. F par \vec{DB} |
| 2. D par \vec{MK} | 6. L par \vec{MB} |
| 3. G par \vec{CE} | 7. A par \vec{HM} |
| 4. B par \vec{AH} | 8. G par \vec{HG} |

★★☆☆☆ EXERCICE 2 (Image) (v)



Déterminer l'image de :

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. C par \vec{AD} | 2. O par \vec{HF} | 3. D par \vec{MU} | 4. C par \vec{NC} |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

B - Caractérisation

★★☆☆☆ EXERCICE 3 (Norme) (L)

Considérons un repère orthonormé $(O; I, J)$, et trois points $A(1,2)$, $B(2,4)$ et $C(-1,-2)$.

- Représenter graphiquement la situation.
- Placer le point M tel que $\vec{CM} = \vec{AB}$
- Placer le point N tel que $\vec{BN} = \vec{CA}$
- Déterminer la norme des vecteurs suivants :

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| (a) \vec{AB} | (b) \vec{AC} | (c) \vec{AC} | (d) \vec{MN} |
|----------------|----------------|----------------|----------------|

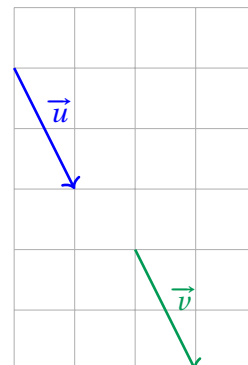
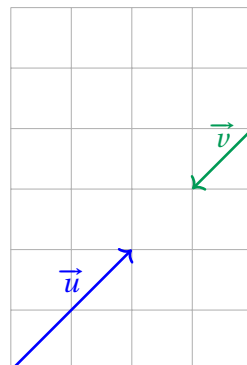
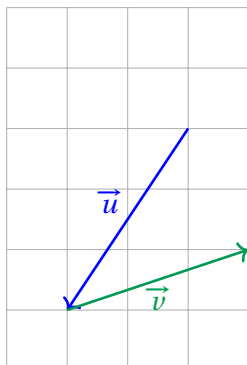
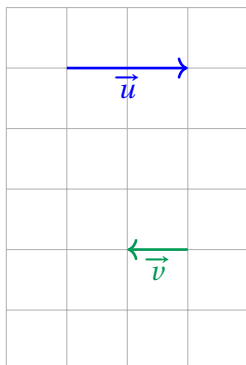
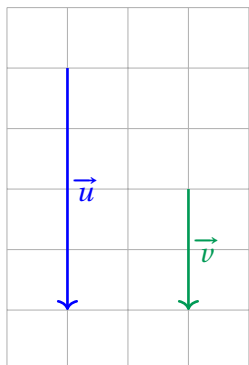
★★★☆☆ EXERCICE 4 (Caractérisation)

Donner les numéros des figures pour lesquelles les vecteurs ont :

1. même direction

2. même sens

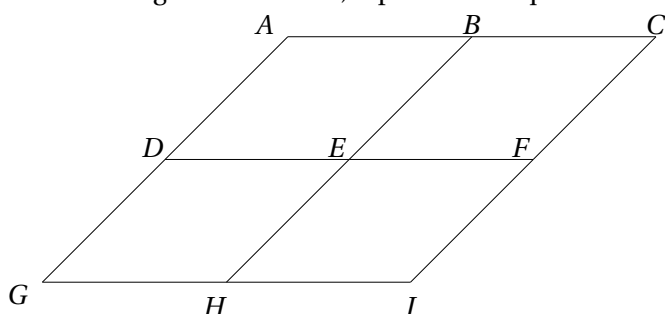
3. même norme



C - Vecteurs égaux

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Vecteurs égaux)

En utilisant la figure ci-dessous, répondre aux questions suivantes :



- Donner tous les vecteurs égaux vecteurs \overrightarrow{AB} .
En utilisant uniquement les points donnés sur la figure.
- Compléter les égalités suivantes avec des points présents sur la figure.

(a) $\overrightarrow{GD} = \dots \overrightarrow{F}$	(c) $\overrightarrow{BF} = \dots \overrightarrow{I}$
(b) $\overrightarrow{AE} = \dots \overrightarrow{H}$	(d) $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{I\dots}$

★★★☆☆ EXERCICE 6 (Parallélogrammes)

Soient $ABCD$ et $ABEF$ deux parallélogrammes.

- Construire la figure.
- Quelles sont les images des points D et F par la translation \overrightarrow{AB} .
- Démontrer que $CDFE$ est un parallélogramme.

★★★☆☆ EXERCICE 7 (Triangle)

Soit ABC un triangle.

- Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$
- Considérons un point M du segment $[AB]$, les points E et F sont les symétriques respectifs des points B et A par rapport au point M .
Démontrer que le quadrilatère $CDFE$ est un parallélogramme.

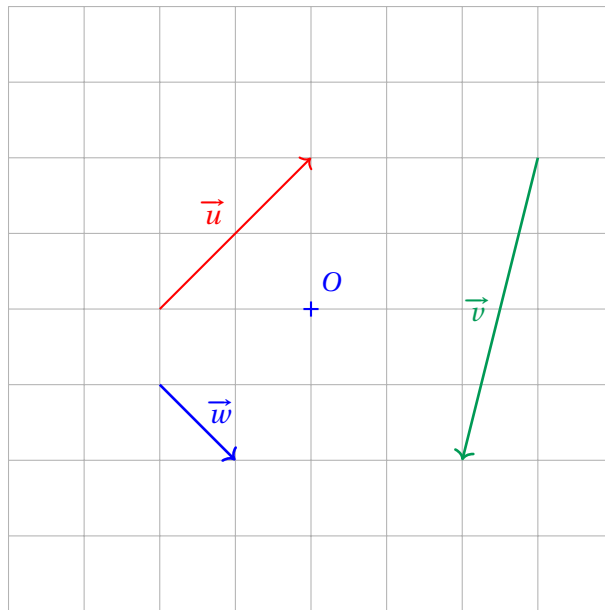
★★★☆☆ EXERCICE 8 (Carré)

- Construire un carré $ABCD$ de centre O .

2. Construire le point E , tel que $\vec{AO} = \vec{EB}$ et le point F tel que les segments $[OC]$ et $[BF]$ se coupent en leur milieu.
3. Démontrer que $\vec{AE} = \vec{OB}$ et $\vec{OB} = \vec{FC}$.
4. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $AECF$?
5. En déduire que O est le milieu du segment $[EF]$.
Démontrer que le quadrilatère $CDFE$ est un parallélogramme.

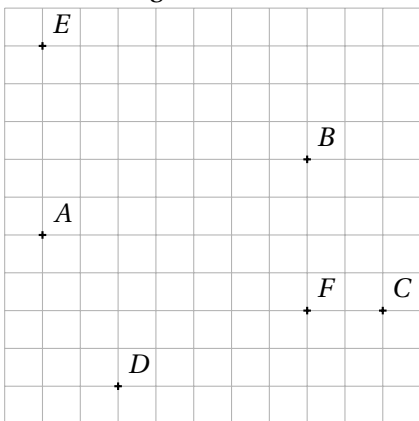
★★☆☆☆ EXERCICE 9 (Construction #1) (V)

Placer les points A, B et C tels que $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{OB}$ et $\vec{w} = \vec{CO}$



★★☆☆☆ EXERCICE 10 (Vrai ou Faux) (V)

À l'aide de la figure ci-dessous, dire dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse ?

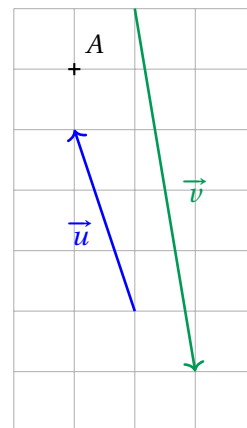
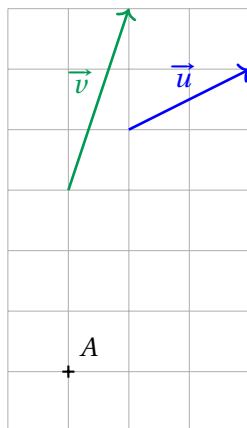
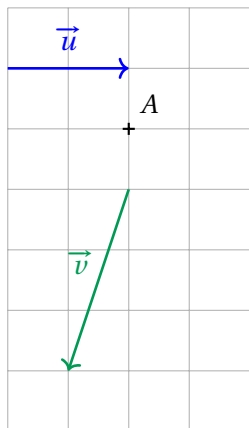


1. $\vec{AB} = \vec{DC}$
2. $\vec{AE} = \vec{FB}$
3. \vec{AD} et \vec{CB} sont opposés.
4. $ACBE$ est un parallélogramme.

D - Somme de vecteurs

★★☆☆☆ EXERCICE 11 (Représentation #1) (V)

Dans chaque cas, construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



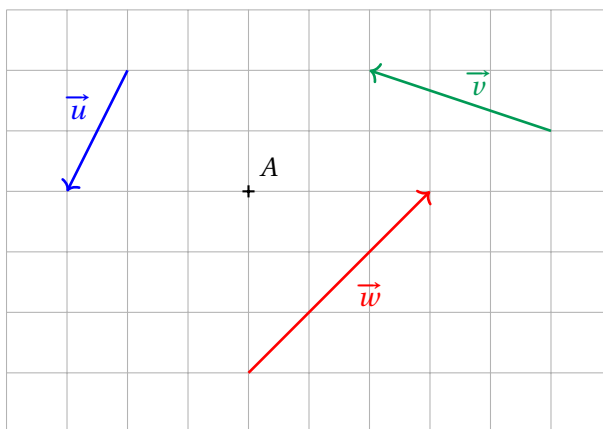
★★★☆☆ EXERCICE 12 (Construction) ⌚

1. Construire un carré $ABCD$ de centre O et de côté 4.
2. Construire le représentant du vecteur :

- | | |
|---|---|
| (a) $\vec{u} = \vec{AO} + \vec{AB}$ d'origine A . | (c) $\vec{w} = \vec{CD} + \vec{OD}$ d'origine C . |
| (b) $\vec{v} = \vec{DA} + \vec{OB}$ d'origine B . | (d) $\vec{z} = \vec{OC} + \vec{OD}$ d'origine O . |

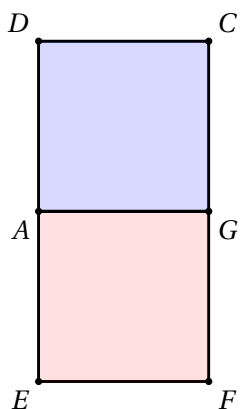
★★☆☆☆ EXERCICE 13 (Représentation #2) ⌚

Construire le point M tel que $\vec{AM} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.



★★★☆☆ EXERCICE 14 (Carrés) ⌚

Soient $ADCG$ et $AGFE$ deux carrés



1. (a) Déterminer l'image du point D par la translation \vec{DA} suivie de la translation \vec{AF} .
 (b) En déduire, $\vec{DA} + \vec{AF}$.
2. Déterminer :
 - (a) $\vec{DA} + \vec{AG}$
 - (b) $\vec{DA} + \vec{DG}$
 - (c) $\vec{CA} + \vec{EF}$
 - (d) $\vec{DA} + \vec{EG}$
 - (e) $\vec{CA} + \vec{EG}$
 - (f) $\vec{DE} + \vec{FC}$

★★☆☆☆ EXERCICE 15 (Relation de Chasles) ⌚

1. À l'aide de la **relation de Chasles**, écrire si possible, sous la forme d'un seul vecteur les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \bullet \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \dots\dots\dots & \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = \dots\dots\dots & \bullet \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AF} = \dots\dots\dots \\ \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots & \bullet \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{AR} = \dots\dots\dots & \bullet \overrightarrow{GT} + \overrightarrow{FG} = \dots\dots\dots \end{array}$$

2. Écrire plus simplement les vecteurs suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} & \text{(c) } \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \\ \text{(b) } \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{JK} & \text{(d) } \overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GD} \end{array}$$

★★★★☆☆ EXERCICE 16 (Incomplet) ⌚

Compléter correctement afin que les égalités vectorielles soient vraies.

$$\begin{array}{lll} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \dots\dots B & \bullet \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IL} + \dots\dots\dots & \bullet \overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots + \overrightarrow{CA} \\ \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \dots\dots\dots & \bullet \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{C\dots\dots} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{G\dots\dots} & \bullet \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{BS} + \dots\dots\dots \end{array}$$

★★★★☆ EXERCICE 17 (Parallélogramme) ⌚

Considérons $ABCD$ un parallélogramme de centre O .

Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[BC], [DC], [AD]$ et $[AB]$.

Compléter les égalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} \bullet \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{A\dots\dots} & \bullet \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{J\dots\dots} & \bullet \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{JO} = \overrightarrow{B\dots\dots} \\ \bullet \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{\dots\dots A} & \bullet \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{\dots\dots L} & \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} = \dots\dots\dots \end{array}$$

★★★★☆ EXERCICE 18 (Démonstration) ⌚

1. Montrer que pour tous points A, B, C et D : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

2. Montrer que pour tous points A, B, C, D et E :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$$

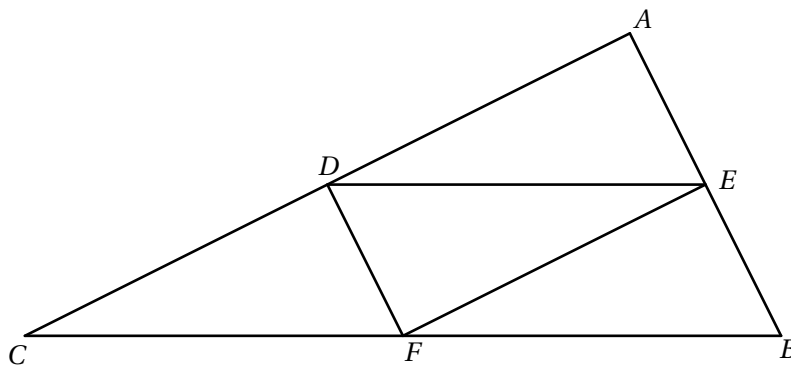
★★★★☆ EXERCICE 19 (Quadrilatère) ⌚

Soient R, S et T trois points alignés.

1. Construire le point P tel que : $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$.
2. En utilisant la relation de Chasles, montrer que : $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$.
3. Construire le point U tel que : $\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{ST}$.
4. Montrer que $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$.
5. En déduire la nature du quadrilatère $STUR$.
6. Démontrer que T est le milieu de $[UP]$.

★★★★☆ EXERCICE 20 (Parallélogrammes) ⌚

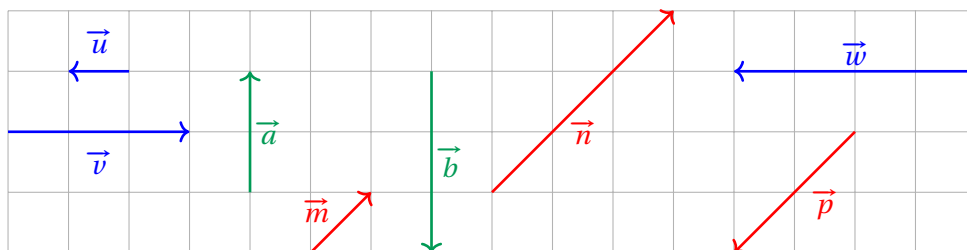
Considérons ABC un triangle et D, E et F tels que $AEFD, DEBF$ et $DEFC$ sont des parallélogrammes.



On pose $\vec{u} = \vec{AD} + \vec{AE}$, $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{ED}$ et $\vec{w} = \vec{AC} + \vec{FB}$.
 Démontrer $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w}$.

E - Colinéarité et produit par un réel

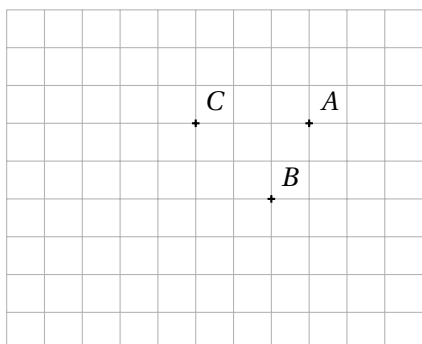
★★☆☆☆ EXERCICE 21 (Graphique).....



Compléter chaque égalité par un nombre réel :

- $\vec{v} = \dots\dots \vec{u}$
- $\vec{b} = \dots\dots \vec{a}$
- $\vec{n} = \dots\dots \vec{p}$
- $\vec{w} = \dots\dots \vec{v}$
- $\vec{n} = \dots\dots \vec{m}$
- $\vec{p} = \dots\dots \vec{m}$

★★☆☆☆ EXERCICE 22 (Construction).....



1. Placer le point M tel que $\vec{AM} = \vec{BA} + \vec{CB}$
2. Placer le point N tel que $\vec{AN} = \vec{BC} + 2\vec{BA}$
3. Placer le point P tel que $\vec{BP} = \vec{AC} - 2\vec{AB}$

★★★☆☆ EXERCICE 23 (Démonstration).....

Soit G le milieu d'un segment [AB] et M un point du plan. Démontrer les relations vectorielles suivantes :

1. $\vec{AG} = \vec{GB}$
2. $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$
3. $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MG}$

★★★☆☆ EXERCICE 24 (Expression) (L)

Exprimer le vecteur \vec{u} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC} .

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| 1. $\vec{u} = \vec{BC}$ | 3. $\vec{u} = 2\vec{CB} + 3\vec{BA} + \vec{CA}$ | 5. $\vec{u} = \vec{CB} - 2\vec{AB}$ |
| 2. $\vec{u} = \vec{BC} + 2\vec{CA}$ | 4. $\vec{u} = \vec{BC} + \vec{AB}$ | 6. $\vec{u} = \vec{AB} + 3\vec{CB} - 2\vec{CA}$ |

★★★☆☆ EXERCICE 25 (Coefficient) (L)

Dans chaque cas, déterminer le coefficient de colinéarité de \vec{u} par rapport \vec{v} , c'est-à-dire le réel k tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

- | | | |
|--|---------------------------------------|--|
| 1. $2\vec{u} = 5\vec{v}$ | 3. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ | 5. $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} = \vec{0}$ |
| 2. $\frac{1}{3}\vec{u} = \frac{5}{6}\vec{v}$ | 4. $5(2\vec{u} - 3\vec{v}) = \vec{0}$ | 6. $3(\vec{u} + \vec{v}) = 5\vec{u} - 2\vec{v}$ |

★★☆☆☆ EXERCICE 26 (Colinéarité) (V)

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que :

$$\vec{u} = \vec{AB} + 4\vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{AB} + 2\vec{AC}$$

Démontrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

★★☆☆☆ EXERCICE 27 (Alignement) (V)

Soit ABC un triangle quelconque, P et Q deux points tels que :

$$\vec{AP} = 2\vec{AB} - \vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AQ} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

Démontrer que les points A, P et Q sont alignés.

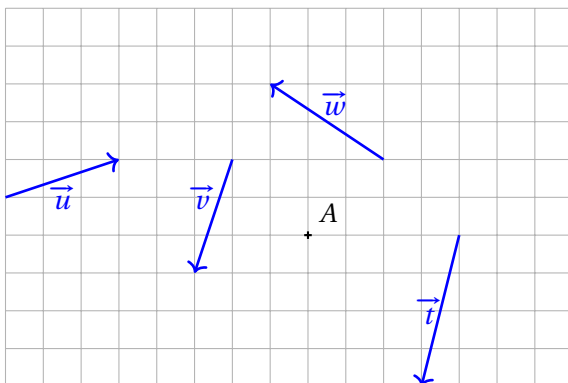
★★☆☆☆ EXERCICE 28 (Milieu) (V)

Soit ABC un triangle. On considère les points D et E définis par :

$$\vec{AD} = 3\vec{AB} + \vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{CE} = 3\vec{BA}$$

Démontrer que C est le milieu de $[DE]$.

★★☆☆☆ EXERCICE 29 (Tracer) (L)



1. Tracer les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.
2. Placer le point M tel que $\vec{AM} = \vec{u} + \vec{t} + 2\vec{w}$
3. $\vec{t} - \vec{v}$ est-il colinéaire à $\vec{u} + \vec{w}$? Justifier.