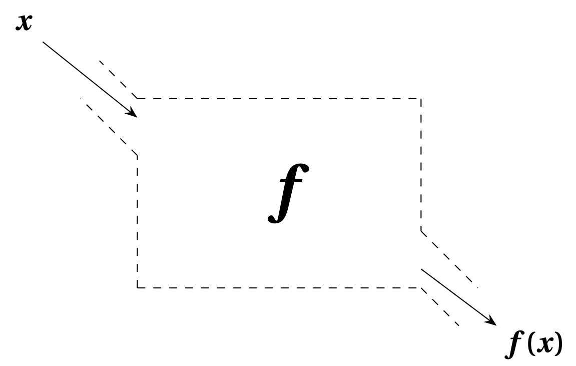
CHAPITRE 5

Généralités sur les fonctions

Plan du chapitre

Introduction

Introduction...



Partie I Vocabulaire

Dans la suite, $\mathscr{D}$ désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

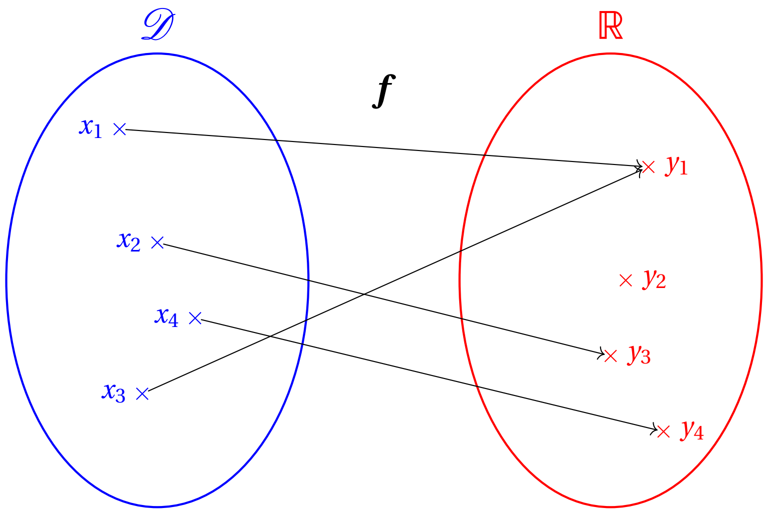
Définition 1 : Fonction

Définir une **fonction** f sur l'intervalle $\mathscr{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel $x \in \mathscr{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$.
On note alors :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

se lit « fonction f qui à x associe $f(x)$ »
L'ensemble $\mathscr{D}$ est appelé **ensemble de définition** de la fonction f.
Le nombre réel $f(x)$ est appelé **image de x** par la fonction f.
Lorsque $y = f(x)$, on dit que x est **un** antécédent du nombre y par la fonction f.

Point chaud : Chaque réel $x \in \mathscr{D}$ a **une et une seule image** par une fonction !
Contrairement à $y \in \mathbb{R}$ qui lui peut avoir plusieurs antécédents et même aucun antécédent par une fonction.



Une et une seule flèche part de chaque élément de $\mathscr{D}$ mais plusieurs, et même aucune, flèche peuvent arriver sur chaque élément de $\mathbb{R}$.

Exemple :

- **Fonction définie à l'aide d'une expression algébrique**

  Considérons la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. L'ensemble de définition de f est : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

  Considérons la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x}$. L'ensemble de définition de g est : $[0, +\infty[$.

- **Fonction définie à l'aide d'un tableau de valeurs**

x	-3	-1	-0,5	0	2	7
$h(x)$	4	1,7	-6	1	1,7	5

  On vient ainsi de définir une fonction h, on peut alors affirmer que :

  - L'image de -3 par la fonction h est ...
  - L'antécédent de 1 par la fonction h est ...
  - 1,7 possède .... antécédents par la fonction h, ce sont .... et ....
  - D'après le tableau, 0 possède .... antécédent.

- **Fonction définie à l'aide d'un algorithme**

  Considérons la fonction j définie par l'algorithme suivant :

  1. Choisir un nombre;
  2. Ajouter 1;
  3. Élever le tout au carré;
  4. Retirer 2 au résultat obtenu.

  On a alors que l'image 2 par la fonction j est ...

Partie II Courbe représentative

A - Définition et propriétés

Définition 2 : Courbe représentative

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$.
On appelle **courbe représentative** ou graphe de f, l'ensemble $\mathscr{C}_f$ des points du plan de coordonnées (x, y) où

$$x \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad y = f(x)$$

On note alors :

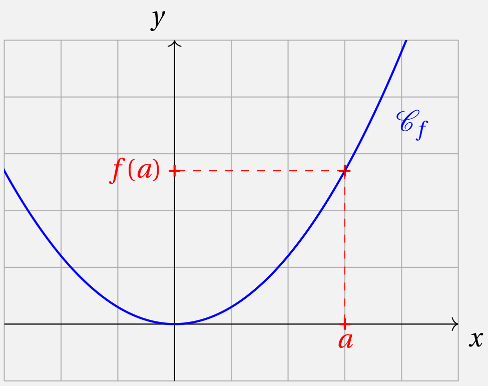
$$\mathscr{C}_f = \{(x, y) / x \in \mathscr{D} \text{ et } y = f(x)\}$$

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

Méthode 1 : Déterminer graphique des images

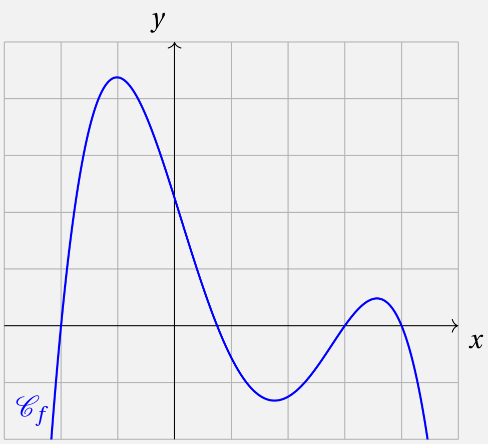
Si on souhaite déterminer l'image de a par la fonction f, à partir du graphe de la fonction f, il faut :

1. On place a sur l'axe des abscisses;
2. On trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par $(a, 0)$;
3. On repère alors le point d'intersection de cette droite avec la courbe de f;
4. Puis on trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par ce point d'intersection;
5. Il nous suffit alors de lire l'image sur l'axe des ordonnées.



À savoir faire 1 : Déterminer graphiquement l'image d'un nombre

On trace, ci-dessous, le graphe d'une fonction f dans un repère :

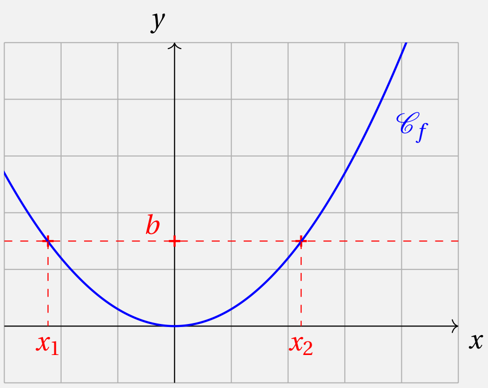


Déterminer graphiquement l'image de 2 par la fonction f.

Méthode 2 : Déterminer graphique les antécédents

Si on souhaite déterminer l'image de b par la fonction f, à partir du graphe de la fonction f, il faut :

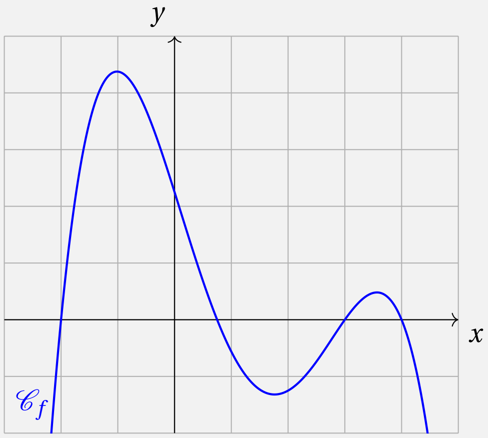
1. On place b sur l'axe des ordonnées ;
2. On trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par $(0, b)$;
3. On repère alors les points d'intersection de cette droite avec la courbe de f ;
4. Puis on trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ces points d'intersection ;
5. Il nous suffit alors de lire les différentes antécédents sur l'axe des abscisses.



Ici on peut affirmer que x_1 et x_2 sont deux antécédents de b par la fonction f.

À savoir faire 2 : Déterminer graphiquement les antécédents d'un nombre

On trace, ci-dessous, le graphe d'une fonction f dans un repère :



Déterminer graphiquement le nombre d'antécédents de -1 par la fonction f. Donner approximativement les antécédents de -1 par la fonction f.

....

....

....

Attention : La lecture graphique n'est pas toujours exacte. Les déterminations graphique des images et antécédents peuvent être imprécises.

Propriété 1 : Point de la courbe

Un point $M(x, y)$ appartient à la courbe de f si, et seulement si :

$$\begin{cases} x \in \mathscr{C}_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

À savoir faire 3 : Savoir si un point appartient à une courbe

Considérons la fonction p définie de la façon suivante :

$$p : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array}$$

Déterminer si les points $A(2,3)$ et $B(1,2)$ appartiennent à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

....

....

....

....

....

....

....

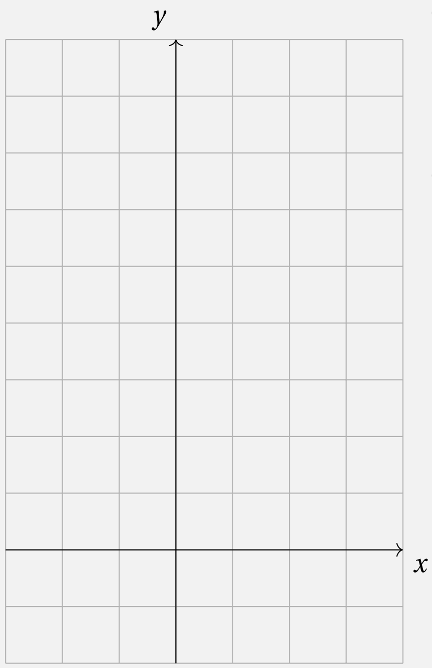
....

B - Méthode pour la tracer

Méthode 3 : Tracer le graphe d'une fonction

1. On construit un tableau de valeurs avec un nombre assez important d'antécédents ;
2. On place les points correspondants dans le repère et on relie les points en « lissant » la courbe.

À savoir faire 4 : Tracer la courbe d'une fonction donnée



Considérons la fonction p définie de la façon suivante :

$$p : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array}$$

Compléter le tableau de valeurs suivants, puis tracer la courbe de p.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$p(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

....
....
....
....
....
....
....
....

C - Fonction paire et fonction impaire

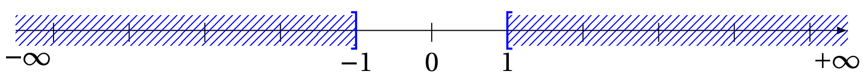
Définition 3 : Paire - impaire

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.

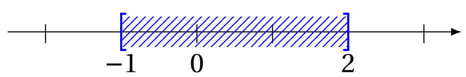
- f est **paire**, si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ on a $-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire**, si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ on a $-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

À retenir : Une des conditions pour être une fonction paire ou impaire est que si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$, on pourra retenir que le domaine de définition de la fonction f, doit être symétrique par rapport à 0.

- L'intervalle $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ est symétrique par rapport à 0.



- L'intervalle $[-1, 2]$ n'est pas symétrique par rapport à 0.



en effet on a $2 \in \mathscr{D}_f$ mais $-2 \notin \mathscr{D}_f$.

Exemple :

- La fonction $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est paire car :
  - Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
  - De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
  $$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

  D'où f est paire sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ est impaire car :
  - Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
  - De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
  $$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = g(x)$$

  D'où g est impaire sur $\mathbb{R}$.

À savoir faire 5 : Paire/impaire

Étudier la parité des fontions suivantes :

1. $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x+3 \end{array}$
2. $\begin{array}{rccl} g: & [-3,6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{2} \end{array}$
3. $\begin{array}{rccl} h: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 - x \end{array}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

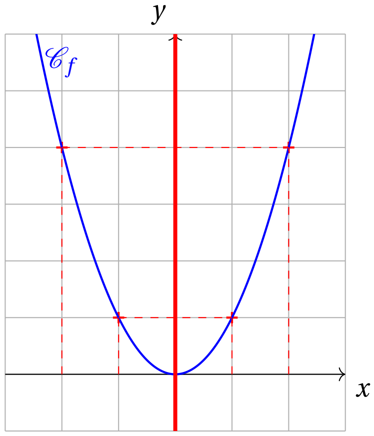
Propriété 2 : Symétrie

Dans un repère orthogonal

- f est **paire** si, et seulement si, la courbe représentative de f est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.
- f est **impaire** si, et seulement si, la courbe représentative de f est **symétrique** par rapport à l'**origine du repère**.

Exemple :

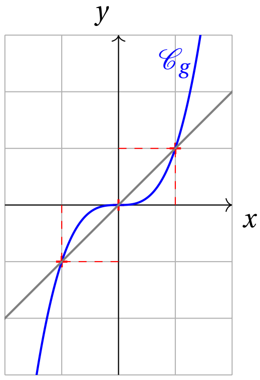
- Considérons la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$



Dans ce repère orthonormé nous avons représenté la courbe de la fonction carré, $x \mapsto x^2$.

Nous avons montré que la fonction carré est paire sur $\mathbb{R}$ et de ce fait nous remarquons bien que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- Considérons la fonction $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$

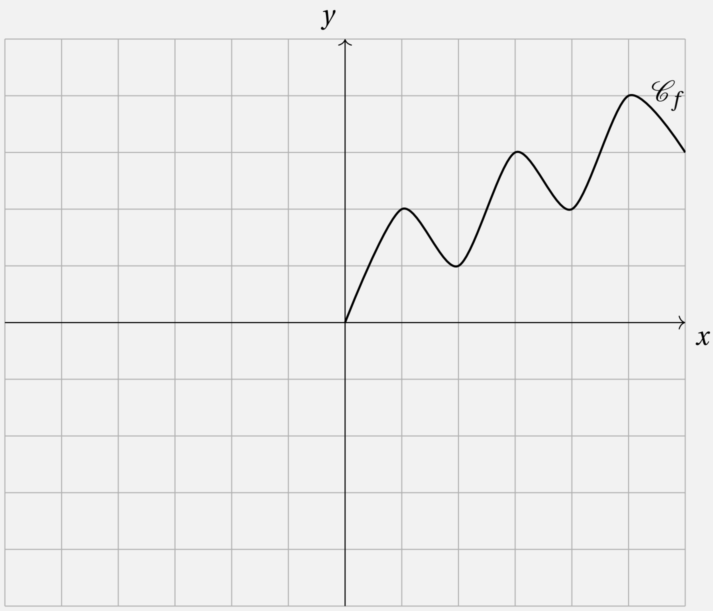


Dans ce repère orthonormé nous avons représenté la courbe de la fonction cube, $x \mapsto x^3$.

Nous avons montré que la fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$ et de ce fait nous remarquons bien que sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à l'origine du repère. En effet, l'origine du repère appartient bien à la droite passant par les points $\left(-1, g(-1)\right)$ et $\left(1, g(1)\right)$.

À savoir faire 6 : Compléter un tracer

1. Compléter en bleu le graphe ci-dessous afin que f soit une fonction paire.
2. Compléter en rouge le graphe ci-dessous afin que f soit une fonction impaire.



Partie III Variation d'une fonction

Définition 4 : Croissante - décroissante

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit alors que :

- f est **croissante** sur I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que :

$$\text{Si} \quad x_1 \leq x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

- f est **décroissante** sur I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que :

$$\text{Si} \quad x_1 \leq x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

À savoir faire 7 : Montrer qu'une fonction est croissante/ décroissante

1. Montrer que la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+3 \end{array}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Montrer que la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3x+1 \end{array}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

À retenir : On retiendra que pour une fonction croissante (respectivement décroissante) si vous êtes capable d'ordonner les antécédents, en appliquant votre fonction, l'ordre sera conversé (respectivement ne sera pas conservé) pour les images.

Définition 5 : Constante

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit alors que f est **constante** sur I si pour tout $x_1, x_2 \in I$

$$\text{Si} \quad x_1 \leq x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Exemple :

La fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 37 \end{array}$ est constante sur $\mathbb{R}$.

En effet pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1 \leq x_2$$

On a alors :

$$h(x_1) = 37 = h(x_2)$$

Information : Tableau de variation d'une fonction

De la même manière que l'on peut reporter les informations du signe d'une fonction dans un tableau de signes, nous allons reporter les informations de variations d'une fonction dans un **tableau de variation**.

Considérons une fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

tel que :

- f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on dira que -1 est une valeur interdite de f ;
- f est croissante sur $]-\infty, -1[\cup[5, +\infty[$;
- f est décroissante sur $]-1, 5]$.

Toutes ces informations peuvent être condensé dans un tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$f(5)$	$\nearrow$	

Un tableau de variation d'une fonction f définie sur un intervalle I est un tableau à double entrée dans lequel on représente par des flèches le sens de variation de f sur des sous-intervalles de I.

Une double barre signifie une valeur interdite pour f.

Attention : « **Variations de f** » Ce sont les variations de la fonction f et non les variations, du nombre réel, $f(x)$.

Définition 6 : Minimum - maximum

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I.

- Une fonction f admet un **minimum** en a sur I,

  $$\text{si} \quad \text{pour tout } x \in I \quad \text{alors} \quad f(x) \geq f(a)$$

  On dira alors que le minimum de f sur I est $f(a)$ atteint en $x = a$, on notera :

  $$\min_{x \in I}\big(f(x)\big) = f(a)$$

- Une fonction f admet un **maximum** en a sur I,

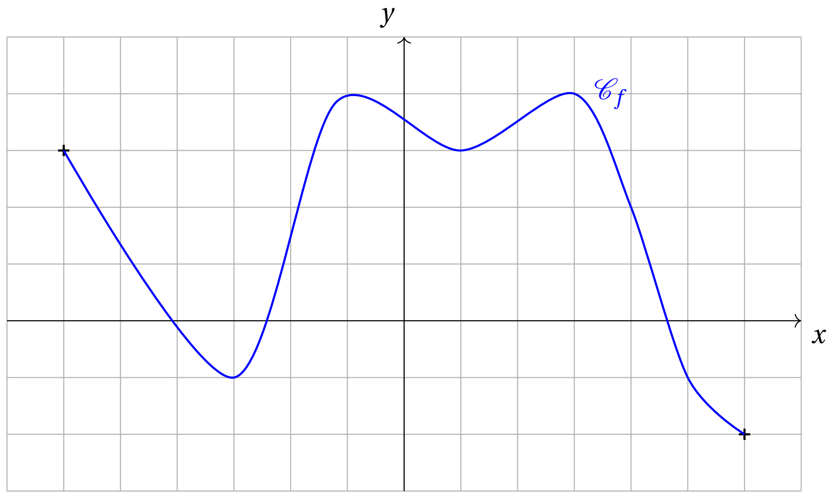
  $$\text{si} \quad \text{pour tout } x \in I \quad \text{alors} \quad f(x) \leq f(a)$$

  On dira alors que le maximum de f sur I est $f(a)$ atteint en $x = a$, on notera :

  $$\max_{x \in I}\big(f(x)\big) = f(a)$$

Exemple :

Considérons le graphe d'une fonction f, ci-dessous dans un repère orthonormé.



On peut alors noter que :

- f est définie sur ......
- $\min\limits_{x\in I}\big(f(x)\big) = \ldots\ldots.$
- $\max\limits_{x\in I}\big(f(x)\big) = \ldots\ldots.$

Partie IV Résolution graphique d'une équation

Dans cette partie considérons deux fonctions f et g, de représentation graphique respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, de plus k sera une constante réelle.

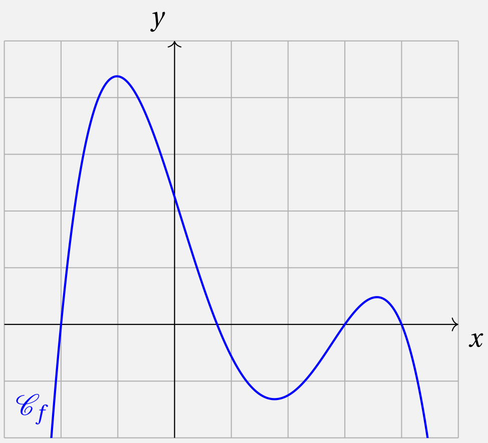
A - Équation du type : $f(x) = k$

Propriété 3 : Résolution graphique de : $f(x) = k$

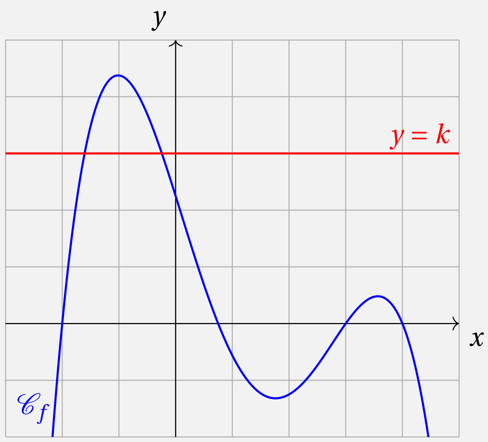
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les **abscisses des points d'intersection** entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = k$.

Méthode 4 : Résolution graphique de : $f(x) = k$

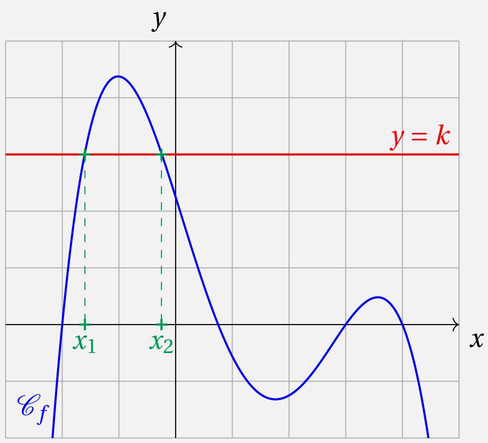
Si on souhaite résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$.



1. **Première étape :** On trace la droite d'équation $y = k$



2. **Deuxième étape :** On repère alors les points d'intersections et on détermine les abscisses de ces points d'intersections.



3. **Troisième étape :** On note alors :

Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = k$. Ainsi par lecture graphique l'ensemble de solution de l'équation $f(x) = k$ est

$$S = \{x_1, x_2\}$$

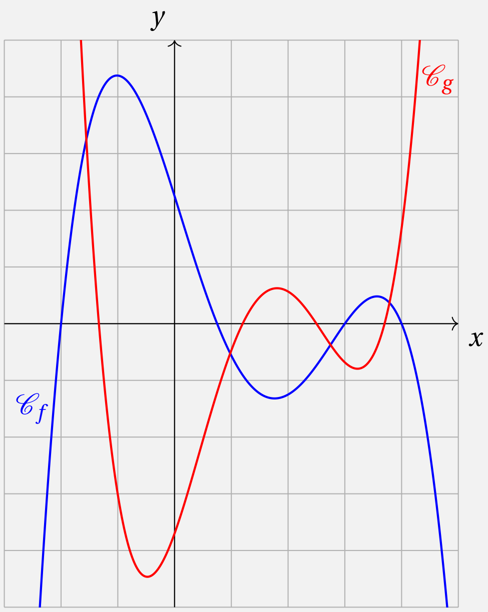
B - Équation du type : $f(x) = g(x)$

Propriété 4 : Résolution graphique de : $f(x) = g(x)$

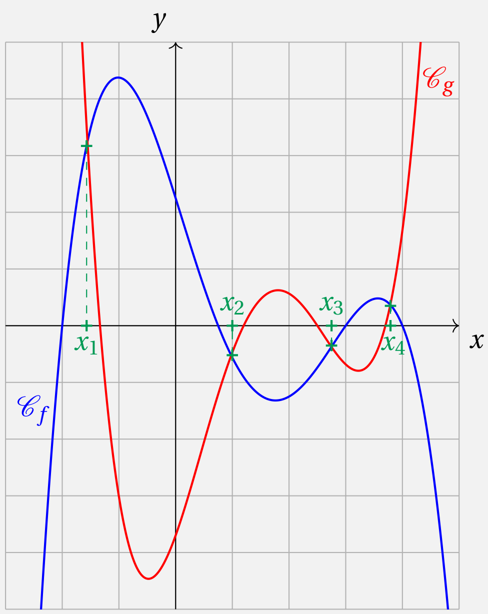
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les **abscisses des points d'intersection** entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Méthode 5 : Résolution graphique de : $f(x) = g(x)$

Si on souhaite résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.



1. **Première étape :** On repère alors les points d'intersections et on détermine les abscisses de ces points d'intersections.



2. **Deuxième étape :** On note alors :

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Ainsi par lecture graphique l'ensemble de solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

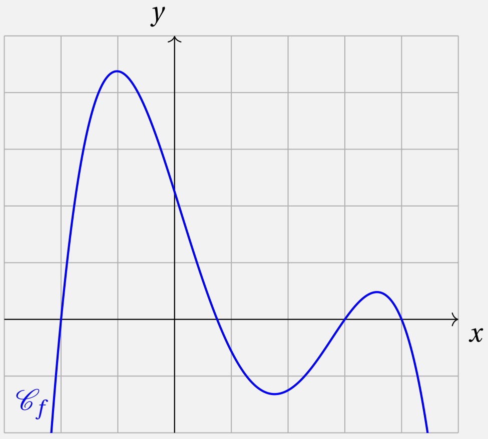
C - Inéquation du type : $f(x) < k$

Propriété 5 : Résolution graphique de : $f(x) < k$

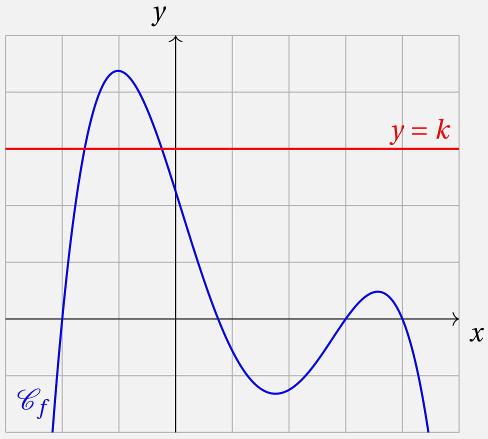
Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les **abscisses des points de la courbe** $\mathscr{C}_f$ situés strictement en dessous de la droite d'équation $y = k$.

Méthode 6 : Résolution graphique de : $f(x) < k$

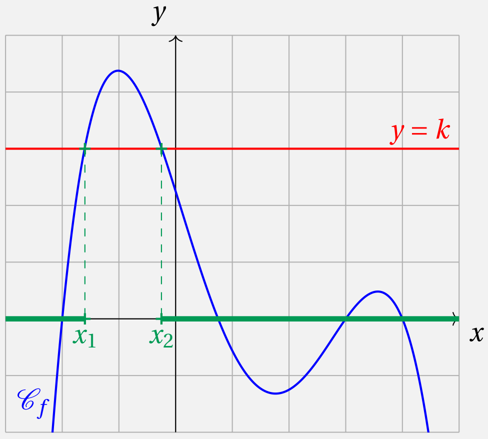
Si on souhaite résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$.



1. **Première étape :** On trace la droite d'équation $y = k$



2. **Deuxième étape :** On repère alors les points de la courbe de la courbe $\mathscr{C}_f$ situé strictement en-dessous de ceux de la droite d'équation $y = k$, puis on détermine alors les abscisses de ces points.



3. **Troisième étape :** On note alors :

Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés strictement en dessous de la droite d'équation $y = k$. Ainsi par lecture graphique l'ensemble de solution de l'inéquation $f(x) < k$ est

$$S =]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$$

⚠ Attention : Étude des bornes

Ici on a $f(x_1) = f(x_2) = k$ donc on ne conserve pas x_1 et x_2 dans l'ensemble de solution. Cependant, dans le cas d'inéquation large (c'est-à-dire : $\leq$, $\geq$) on conserverait x_1 et x_2.

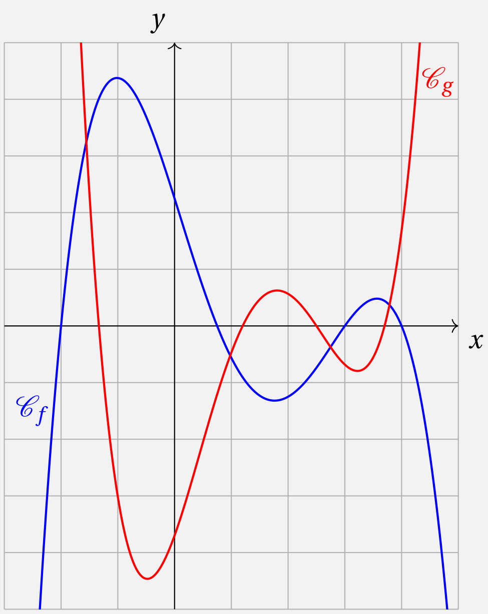
D - Inéquation du type : $f(x) < g(x)$

Propriété 6 : Résolution graphique de : $f(x) < g(x)$

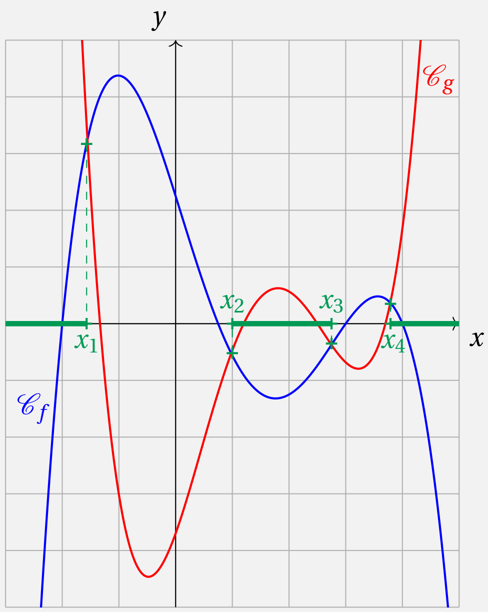
Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les **abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés strictement en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$**

Méthode 7 : Résolution graphique de : $f(x) < g(x)$

Si on souhaite résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.



1. **Première étape :** On repère alors les points de la courbe de la courbe $\mathscr{C}_f$ situé strictement en-dessous de ceux de la courbe $\mathscr{C}_g$, puis on détermine alors les abscisses de ces points.



2. **Deuxième étape :** On note alors :

Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés strictement en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$. Ainsi par lecture graphique l'ensemble de solution de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est :

$$S =]-\infty, x_1[\cup]x_2, x_3[\cup]x_4, +\infty[$$

Attention : Étude des bornes

Ici on a $f(x_1) = g(x_1)$, ... donc on ne conserve ni x_1, ni x_2, ni x_3, ni x_4 dans l'ensemble de solution. Cependant, dans le cas d'inéquation large (c'est-à-dire : ≤, ≥) on conserverait x_1, x_2, x_3 et x_4.

Partie V Exercices

A - Images - antécédents

★★★☆☆ **EXERCICE 1** (Détermination)

Considérons la fonction suivante :

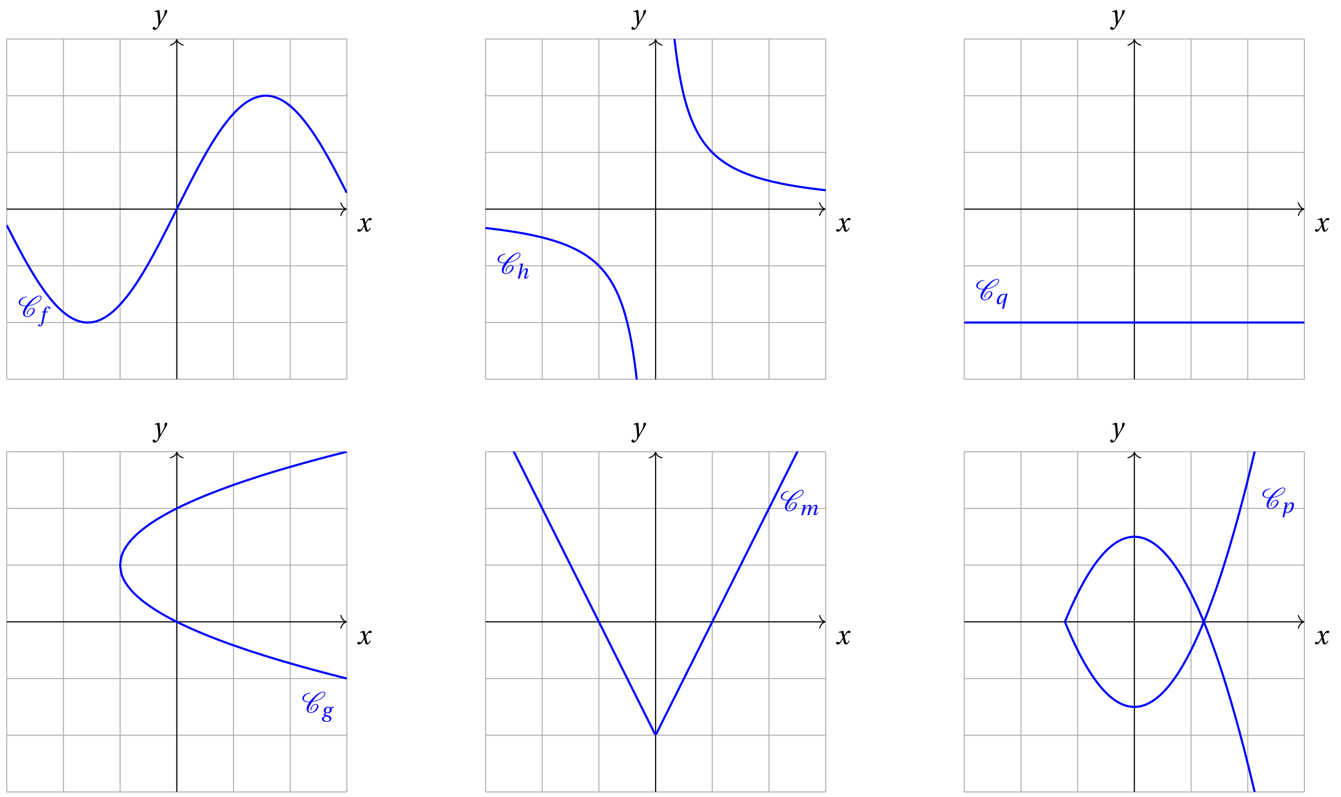
$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1} \end{array}$$

1. Peut-on déterminer l'image 1 par la fonction f ? Quelle est alors le domaine de définition de f ?
2. Déterminer les images de $0, -1$ et $-\dfrac{1}{2}$ par la fonction f.
3. Déterminer les antécédents de 0,1 et -2 par la fonction f.

B - Courbe représentative

★★☆☆☆ **EXERCICE 2** (Fonction ou pas ?)

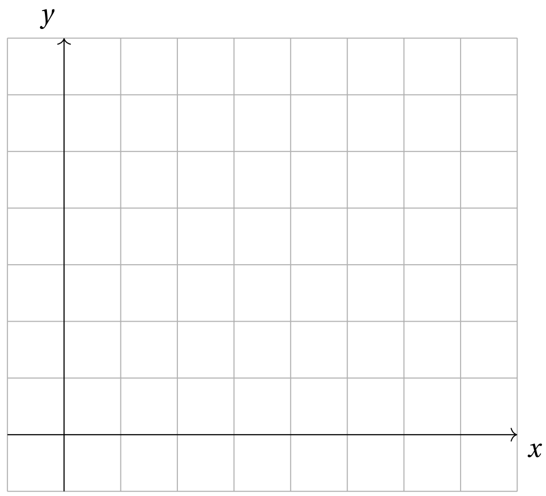
Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



★★★☆☆ **EXERCICE 3** (Tracer)

Considérons la fonction suivante : $f : x \mapsto \dfrac{2}{x} - 2$.

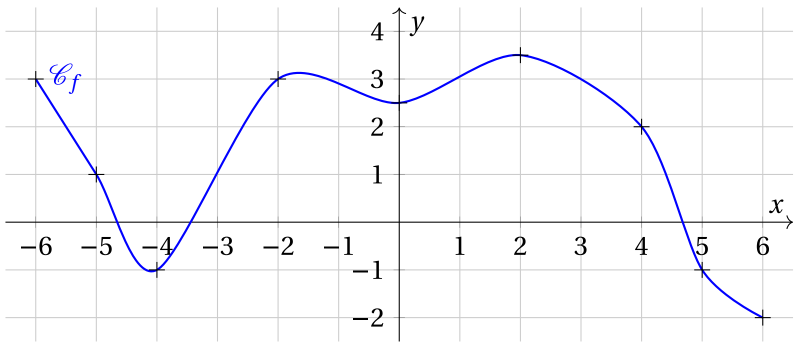
1. Le nombre réel 0 appartient-il au domaine de définition de f ?
2. Pour la suite on se restreindra à l'étude de la fonction f sur l'intervalle $]0,2]$.
   (a) Établir un tableau de valeurs avec un pas de 0,25.
   (b) Tracer la courbe représentative de la fonction f.



(c) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur votre calculatrice et vérifier si elle est semblable à celle tracer dans la question précédente.

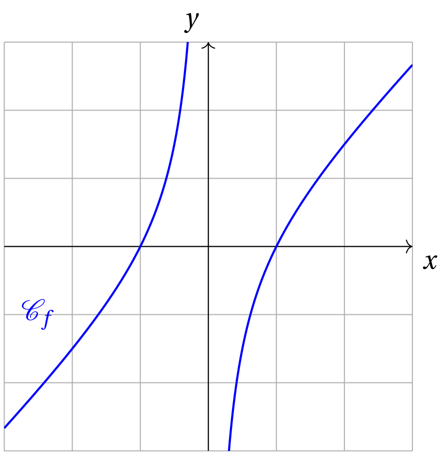
★★★☆☆ **EXERCICE 4** (Lecture graphique #1) ....

Dans le repère ci-dessous, on trace la courbe représentative de la fonction f.



1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner l'image de 2 puis 4.
3. Donner $f(-5)$ puis $f(-2)$.
4. Combien le réel 2 a-t-il d'antécédents par la fonction f ?
5. Déterminer tous les antécédents de -1 par f.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 5** (Appartient ?) ....



Considérons la fonction $f : x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ et traçons son graphe ci-contre.

1. Le nombre réel 0 appartient-il au domaine de définition de f ?
2. Pour chacun des points suivants, dire s'il appartient ou non à $\mathscr{C}_f$.

(a) $A(0,5)$

(b) $B(-2,-1,5)$

(c) $C(1,0)$

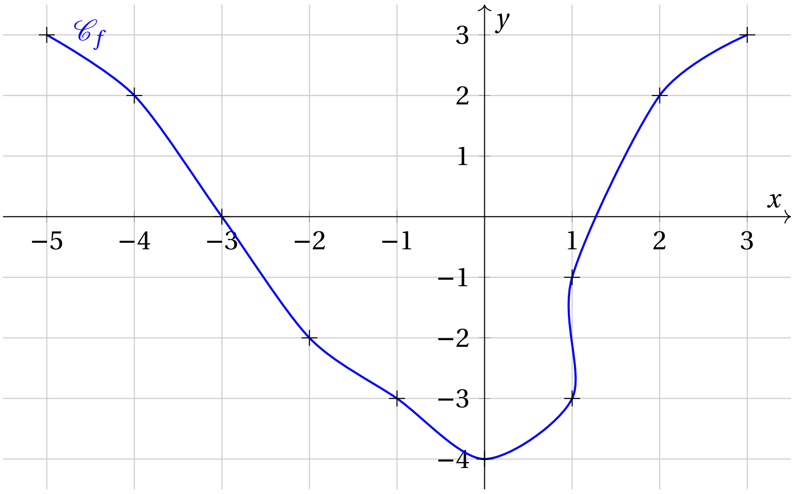
(d) $D\left(4, \dfrac{15}{4}\right)$

(e) $E(-5,-4,8)$

(f) $F(9,9)$

★★★☆☆ **EXERCICE 6** (Lecture graphique #2)

Dans le repère ci-dessous, on trace la courbe représentative de la fonction f.



1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner l'image de -3 puis 2.
3. Donner $f(-5)$ puis $f(3)$.
4. Combien le réel 0,5 a-t-il d'antécédents par la fonction f ?
5. Déterminer tous les antécédents de -3 par f.

C - Fonction paire - fonction impaire

★★★☆☆ **EXERCICE 7** (Paire ? Impaire ?)

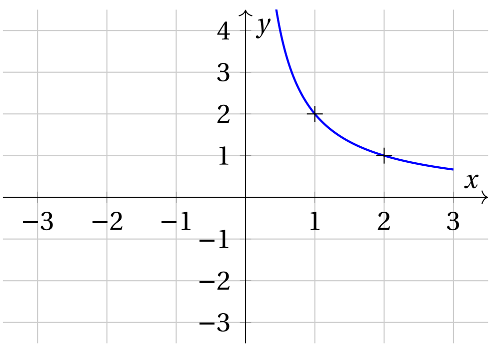
Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

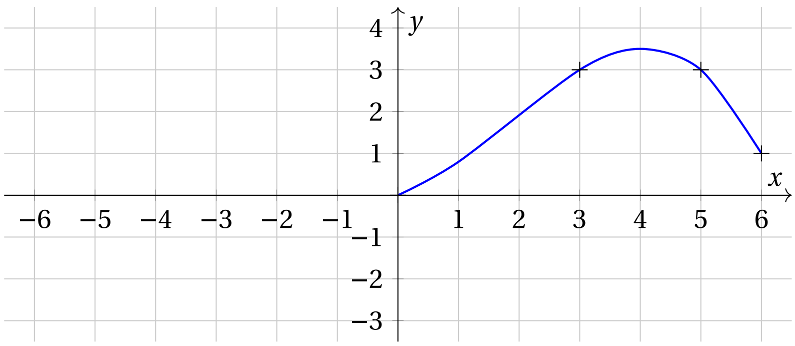
$$f(x) = 3x^4 + \frac{3}{x^2+3} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 - 5x$$

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $f(-x)$;
   (b) Comparer $f(x)$ et $f(-x)$.
   Que peut-on conclure sur f ?
2. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $g(-x)$;
   (b) Comparer $g(x)$ et $g(-x)$.
   Que peut-on conclure sur g ?

★★☆☆☆ **EXERCICE 8** (Compléter...)

Dans chaque cas, compléter la courbe en rouge pour qu'elle représente une fonction paire, puis en vert pour qu'elle représente une fonction impaire.

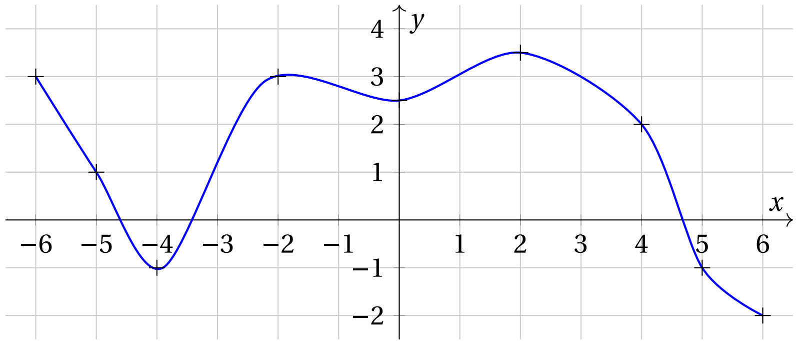




D - Variation d'une fonction

★☆☆☆☆ **EXERCICE 9** (Graphiquement) ....

Dresser le tableau de variation de la fonction f dont la courbe représentative est représentée ci-dessous.



★★☆☆☆ **EXERCICE 10** (Sens de variation) ....

Dans chaque dresser le tableau de variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f_1 : x \mapsto 3x - 1$
2. $f_2 : x \mapsto -x + 2$
3. $f_3 : x \mapsto 2x - 8$
4. $f_4 : x \mapsto -5x - 15$
5. $f_5 : x \mapsto 4(2 - 3x)$
6. $f_6 : x \mapsto 5x + 3(1 - 9x)$

★★★☆☆ **EXERCICE 11** (Fonction carré) ....

Étudier le sens de variation de la fonction carré sur $\mathbb{R}$

$$f : x \mapsto x^2$$

On pourra ensuite dresser son tableau de variations.

★★★★☆ **EXERCICE 12** (Fonction du second degré # 1) ....

Étudier le sens de variation de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$

$$f : x \mapsto 2(x^2 - 1) - 5$$

★★★★★ **EXERCICE 13** (Fonction du second degré # 2) ....

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + 1)^2$$

1. Tracer la fonction f sur votre calculatrice et conjecturer son sens de variation sur I.
2. Pour $a \in I$, montrer que $a + 1 \in \mathbb{R}_+$.
3. À l'aide du sens de variation de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, déterminer le sens de variation sur I.

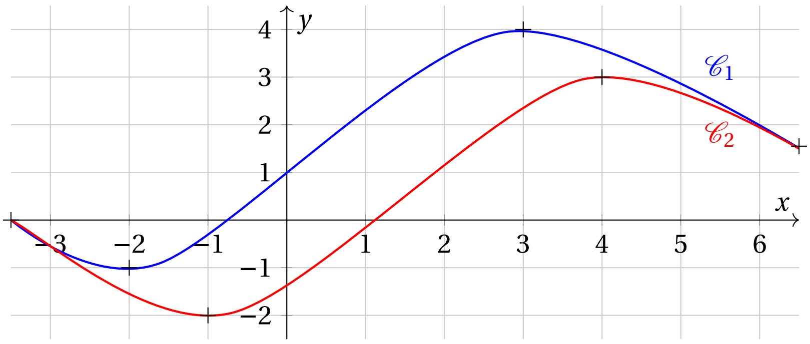
★★★★★ **EXERCICE 14** (Fonction racine carrée) ....

On considère la fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction racine carrée.
2. Montrer que pour $0 \leq x < y$ on a :
$$y - x = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{y} + \sqrt{x})$$
3. En déduire le sens de variation de la fonction racine carrée..

★★⯪☆☆ **EXERCICE 15** (Courbes) ....

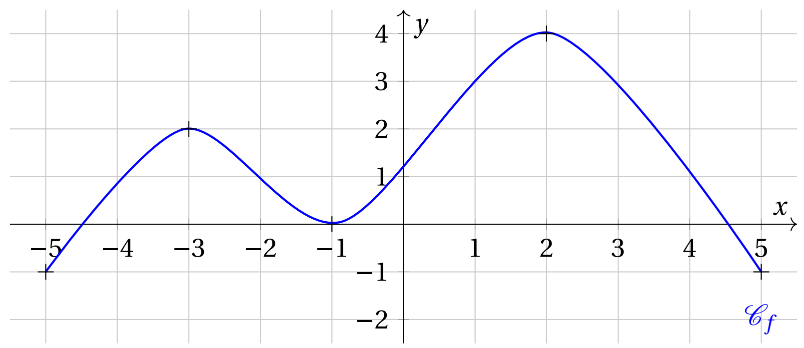
Voici les courbes représentatives $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de deux fonctions, respectivement f et g.



Dresser le tableau de variations de chacune de ces deux fonctions à l'aide des courbes représentatives ci-dessus.

★★☆☆☆ **EXERCICE 16** (Maximum - minimum) ....

Considérons une fonction f représentée ci-dessous



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer le maximum de f sur $[-5, 0]$
3. Déterminer le maximum de f sur $[-3, 2]$
4. Déterminer le maximum et le minimum de f sur son domaine de définition et donner en quelles valeurs sont atteins le maximum et le minimum.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 17** (À l'aide d'un tableau) ....

x	-10		-5		-3		-1		0		5		6		10
Variations de f	3	↘	1	↗	2	↗	6	↘	5	↘	-4	↗	-2	↗	0

1. Quel est le maximum de f sur $[-10, 10]$? Le minimum de f sur $[-10, 10]$?
2. Recopier et compléter le plus précisement possible.

   (a) Pour tout $x \in [-10, -5]$, $... \leq f(x) \leq ...$

   (b) Pour tout $x \in [-5, 5]$, $... \leq f(x) \leq ...$

3. Réaliser, si possible, la comparaison des images des nombres suivants :

   (a) -5 et 5 ;

   (b) -4 et 5 ;

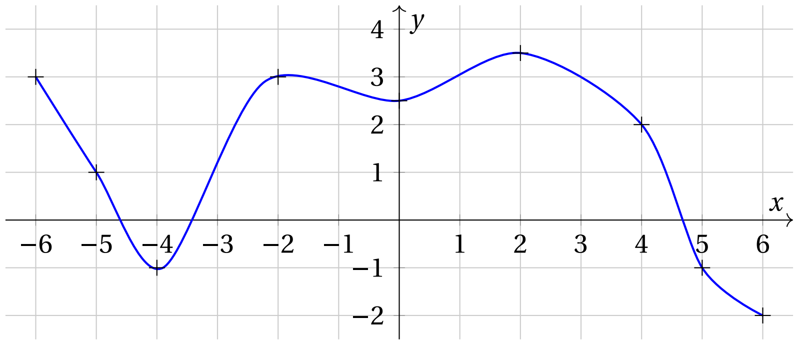
   (c) -6 et 4 ;

   (d) -8 et -4.

E - Résolution graphique

★★☆☆☆ **Exercice 18** (Résolution #1) ....

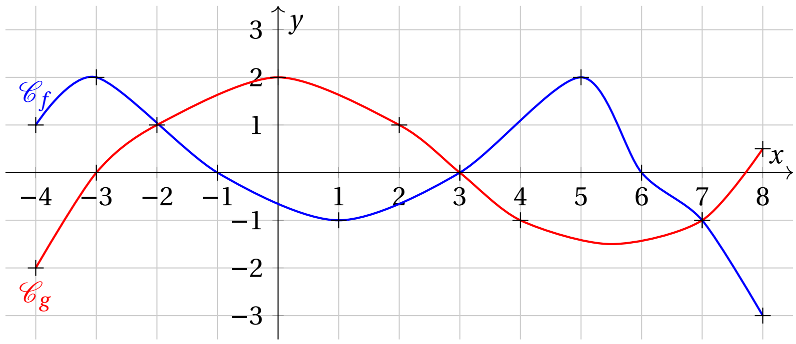
Soit f la fonction dont la courbe représentative est représentée ci-dessous :



1. Résoudre graphiquement : $f(x) = 3$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -0,5$. Et pour $f(x) = 4$?
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$. Puis dresser le tableau de signes de f.

★★⯪☆☆ **Exercice 19** (Résolution #2) ....

Soient f et g deux fonctions définies sur $[-4,8]$, on représente ci-dessous leur courbe dans un repère orthonormé.



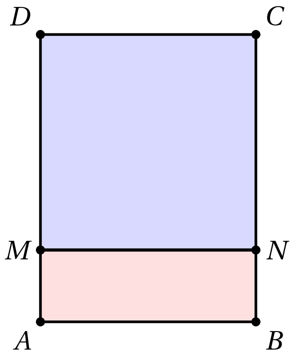
1. Dresser les tableaux de signes de f et g.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.
4. On considère alors la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$.
   Résoudre alors l'équation $h(x) = 0$.
5. Dresser le tableau de signes de la fonction h.

F - Problème

★★★⯪☆ **Exercice 20** (Optimisation) ....

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 6$.
M est un point du segment $[AD]$ et N le point de $[BC]$ tel que $ABNM$ soit un rectangle.
On pose $x = AM$ puis on modélise l'aire du triangle DMN en fonction de x par une fonction f.

De même on modélise l'aire du rectangle $ABNM$ en fonction de x par une fonction g.



1. Exprimer l'aire du rectangle DMN en fonction de x.
2. Exprimer l'aire du rectangle $ABNM$ en fonction de x.
3. Donner l'ensemble de définition des fonctions de f et g.
4. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
5. En déduire pour quelle valeur de x l'aire du triangle DMN est égale à l'aire du rectangle $ABNM$.
6. Tracer dans un repère orthonormé d'unité un carreau, les courbes représentatives des fonctions f et g.
7. Déterminer graphiquement, pour quelle valeur de x l'aire du triangle DMN est strictement supérieur à l'aire du rectangle $ABNM$.