CHAPITRE 4

Géométrie de base

Plan du chapitre

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons découvrir les notions fondamentales de géométrie plane : comment se repérer grâce aux coordonnées, calculer des distances et trouver le milieu d'un segment. Nous étudierons aussi différentes configurations du plan avant de mettre en pratique ces outils à travers des exercices.

Partie I Repérage

A - Repérage et coordonnées

Définition 1 : Repère

Définir un **repère** c'est donner trois points O, I et J non alignés dans un ordre précis.
On note $(O; I, J)$ ce repère et :

- le point O l'**origine** du repère;
- la droite (OI) est l'**axe des abscisses** orienté de O vers I, la longueur OI donne l'unité sur cet axe;
- la droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** orienté de O vers J, la longueur OJ donne l'unité sur cet axe.

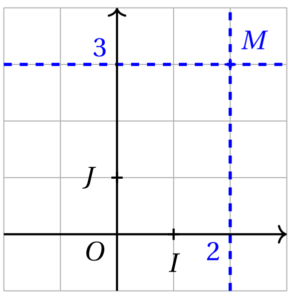
Méthode 1 : Repérer un point

Pour **repérer** un point M sur un repère,

- On trace les parallèles passant par M et on précise l'abscisse x et l'ordonnée y du point M au niveau des axes;
- Le couple (x, y) est le couple des coordonnées du point M et on note $M(x, y)$.

Exemple :

On représente le repère $(O; I, J)$ et le point M ci-dessous :



Le point M a pour coordonnées $(2, 3)$.

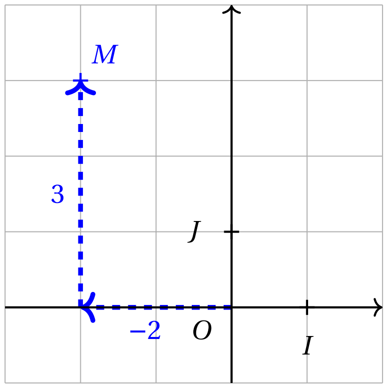
Méthode 2 : Placer un point

Pour **placer** un point M de coordonnées (x, y) sur un repère,

- On part de l'origine du repère O;
- On se déplace de x unité sur l'axe des abscisses (OI), on obtient un point temporaire;
- À partir de ce point temporaire, on se déplace de y unité sur l'axe des ordonnées (OJ);
- On peut alors marquer le point obtenu par un $+$.

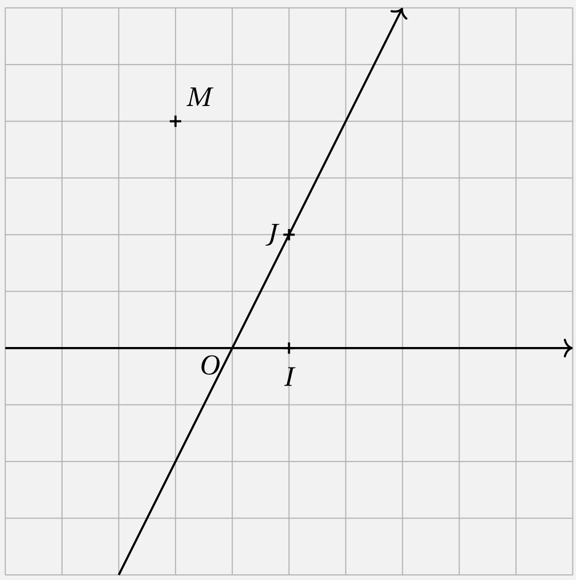
Exemple :

Plaçons le point $M(-2,3)$ sur le repère $(O;I,J)$:



À savoir faire 1 : Lire les coordonnées et placer un point

On considère le repère $(O;I,J)$ suivant :

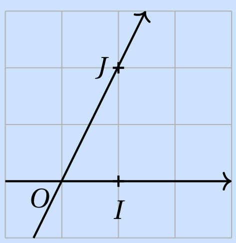


1. Donner les coordonnées du point M.
2. Placer le point A de coordonnées $(3,-2)$

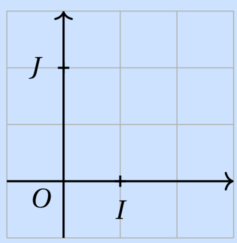
Définition 2 : Les différents repères

Considérons un repère du plan $(O;I,J)$, ce repère est dit :

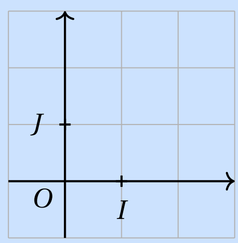
- **orthogonal** si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires entre elles ;
- **orthonormé** si c'est un repère orthogonal **et** que les points I et J sont équidistants du point O. C'est-à-dire $OI = OJ$.



Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère orthonormé

B - Distance dans un repère orthonormé

B.1 - Distance

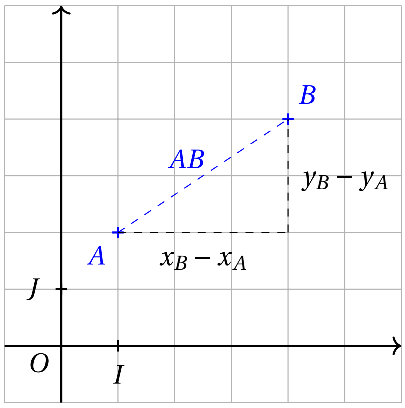
Propriété 1 : Distance entre deux points

Dans un repère **orthonormé** $(O; I, J)$, on considère les points $A\left(x_A, y_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B\right)$.
La **distance** entre les points A et B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$

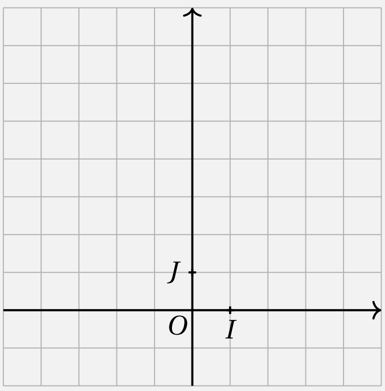
l'unité de longueur est l'unité de longueur commune aux deux axes.

À retenir : Théorème de Pythagore
Cette propriété est juste une conséquence du théorème de Pythagore. En effet, dans un repère orthonormé la situation se représente ainsi :



À savoir faire 2 : Calculer la distance entre deux points

Considérons un repère orthonormé $(O; I, J)$, et deux points $A(2; -1)$ et $B(-4; 7)$.



1. Placer les points A et B sur le repère ci-contre.
2. Calculer la distance entre les points A et B.

....

....

....

....

....

....

B.2 - Alignement

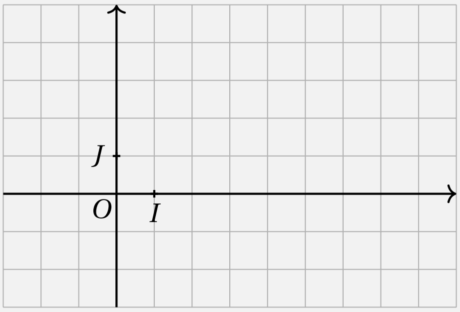
Propriété 2 : Alignement

Soient A, B et C trois points distincts du plan muni d'un repère orthonormé.
Les points A, B et C sont alignés dans cet ordre si, et seulement si,

$$AC = AB + BC$$

À savoir faire 3 : Vérifier l'alignement de trois points

Considérons un repère orthonormé $(O;I,J)$, et trois points $A(-2,-2), B(3,1)$ et $C(8,4)$.



1. Placer les points A, B et C sur le repère ci-contre. Les points semblent-ils alignés ? ....
2. Le démontrer.

....
....
....
....
....
....

C - Milieu d'un segment

Propriété 3 : Milieu d'un segment

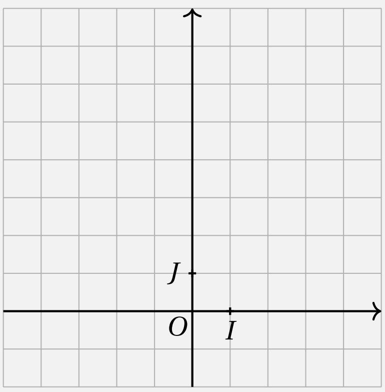
Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$ on considère les points $A\left(x_A, y_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B\right)$
Le **point milieu** I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(x_I, y_I\right)$ définies par :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

À retenir : L'abscisse du point milieu du segment $[AB]$ est la moyenne des abscisses de A et B, on a de même pour l'ordonnée du point milieu.

À savoir faire 4 : Déterminer le point milieu d'un segment

Considérons un repère orthonormé $(O;I,J)$, et deux points $A\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ et $B\left(2, -\frac{3}{2}\right)$.



1. Placer les points A et B sur le repère ci-contre.
2. Déterminer les coordonnées du point milieu I du segment $[AB]$.

....
....
....
....
....
....

Partie II Configurations du plan

A - Quadrilatères

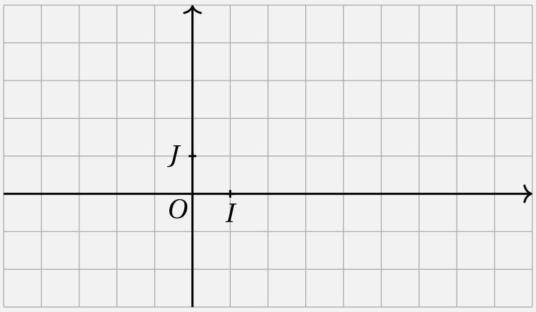
Propriété 4 : Quadrilatères

Soient A, B, C et D quatre points du plan muni d'un repère orthonormé.

- $ABCD$ est un **parallélogramme** si, et seulement si, les diagonales se coupent en leur milieu.
- $ABCD$ est un **rectangle** si, et seulement si, les diagonales se coupent en leur milieu et ABD est un triangle rectangle en B.
- $ABCD$ est un **carré** si, et seulement si, les diagonales se coupent en leur milieu et ABD est un triangle rectangle isocèle en B.
- $ABCD$ est un **losange** si, et seulement si, les quatre côtés sont de la même longueur.

À savoir faire 5 : Utiliser les propriétés des quadrilatères

Considérons un repère orthonormé $(O; I, J)$, et deux points $A(1,4), B(8,3), C(3,-2)$ et $D(-4,-1)$.



1. Placer les points sur le repère ci-contre.
2. Tracer les côtés et les diagonales du quadrilatères $ABCD$.
3. Déterminer la longueur AB.

   ....

   ....

   ....

   ....

4. Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.

   ....

   ....

   ....

   ....

5. Déterminer les coordonnées du point milieu I du segment $[AC]$.

   ....

   ....

   ....

6. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

7. Expliquer pourquoi les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires entre elles.

   ....

   ....

. . . .

. . . .

. . . .

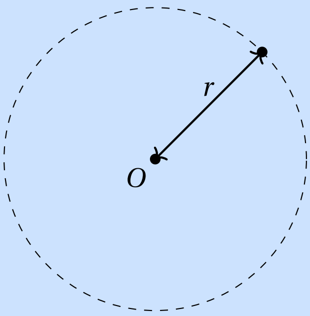
. . . .

B - Distance et ensemble de points

B.1 - Cercle

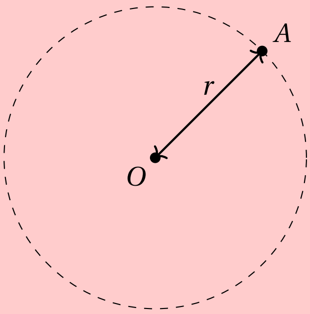
Définition 3 : Cercle

Le **cercle** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan situés à une distance r du centre O.



Propriété 5 :

Un point A appartient au cercle de centre O et de rayon r si, et seulement si, $OA = r$



À savoir faire 6 : Manipuler les propriétés d'un cercle

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $I(1;2)$ passant par $A(6,2)$. Le point $M(5,5)$ appartient-il au cercle $\mathscr{C}$?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

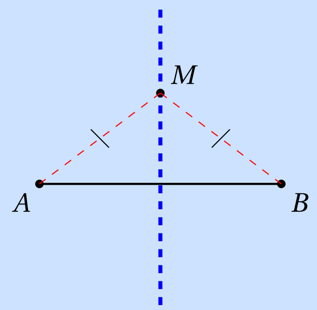
. . . .

. . . .

B.2 - Médiatrice

Définition 4 : Médiatrice

La **médiatrice** d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points M équidistant à A et B, c'est-à-dire tel que : $MA = MB$



Propriété 6 :

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu.

À savoir faire 7 : Manipuler les propriétés d'une médiatrice

Considérons deux points $A(1,2)$ et $B(2,3)$ du plan. Le point $M(0,4)$ appartient-il à la médiatrice du segment $[AB]$? Et le point $N(5,5)$?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

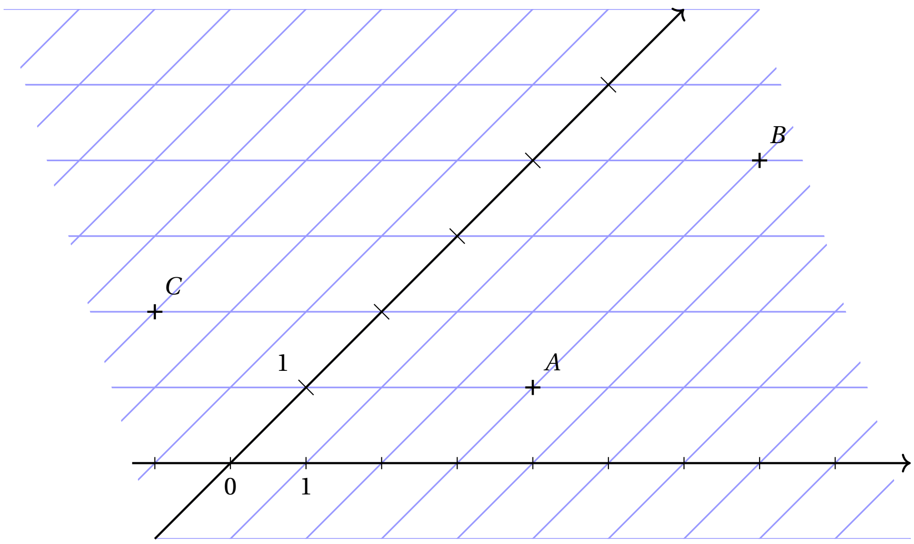
....

Partie III Exercices

A - Repérage

★★☆☆☆ **EXERCICE 1** (Repère #1) ....

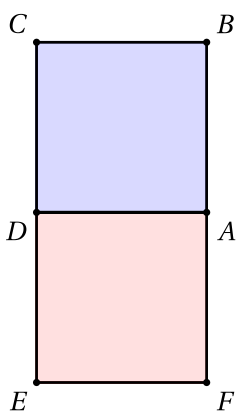
On considère un repère quelconque ci-dessous :



1. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.
2. Placer les points $M(6,2)$ et $N(-5,5)$.

★★☆☆☆ **EXERCICE 2** (Repère #2) ....

Soient $ABCD$ et $ADEF$ deux carrés



1. On se place dans le repère $(D; C, A)$
   (a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F
   (b) En reproduisant la figure sur votre cahier (*on pourra choisir 3 carreaux comme longueur des carrés*) placer les points $M(-1,1)$ et $N(3,-1)$.
2. On se place maintenant dans le repère $(E; C, F)$.
   Déterminer alors les coordonnées des points A, B, C, D, E et F dans ce repère.
3. Dans le repère $(B; C, A)$, donner les coordonnées des points D et F.
4. Dans le repère $(F; A, E)$ quel point à pour coordonnée $(2,1)$
5. Donner un repère dans lequel point E a pour coordonnée $(1,2)$

★★★☆☆ **EXERCICE 3** (Construction) ....

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. Placer le point S de coordonnées $(2,1)$.
2. Construire le point T d'abscisse négative tel que SOT soit rectangle en O et tel que $OT = 2OS$.
3. Lire les coordonnées du point T.
4. Construire le point E tel que $TOSE$ soit un rectangle.
5. Lire les coordonnées du point E.

★★★☆☆ **Exercice 4** (Parallélogramme) ....

On considère un parallélogramme $ADCB$ de centre O.
Le point E est le milieu du segment $[AD]$, le point F est le milieu du segment $[CD]$ et le point G est le symétrique du point A par rapport à F.
Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G dans les repères suivants :

1. $(A; B, D)$
2. $(O; E, F)$
3. $(O; E, B)$

B - Calculs avec les coordonnées

★★☆☆☆ **Exercice 5** (Distance #1) ....

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère le triangle RST tel que $R(1,4)$, $S(5,1)$ et $T(1,-1)$.

1. Représenter graphiquement la situation sur votre cahier.
2. Que peut-on conjecturer sur la nature du triangle RST ?
3. Valider ou invalider la conjecture précédente.

★★☆☆☆ **Exercice 6** (Triangle rectangle) ....

Dans un repère orthonormé, on considère trois points $I(8,2)$, $J(11,6)$ et $K(12,4)$.
Montrer que le triangle IJK est rectangle.

★★☆☆☆ **Exercice 7** (Distance #2) ....

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère le quadrilatère $MARE$ tel que $M(-4,1)$, $A(1,3)$, $R(6,1)$ et $E(1,-1)$.

1. Représenter graphiquement la situation sur votre cahier.
2. Que peut-on conjecturer sur la nature du triangle RST ?
3. Valider ou invalider la conjecture précédente.

★★☆☆☆ **Exercice 8** (Nature #1) ....

Dans un repère orthonormé, on considère trois points $M(-1,1)$, $N(-7,1)$ et $P(-4,-1-3\sqrt{3})$.
Quelle est la nature du triangle MNP ?

★★☆☆☆ **Exercice 9** (Nature #2) ....

Dans un repère orthonormé, on considère trois points $A(4,1)$, $B(1,-1)$ et $C(6,-2)$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

★★☆☆☆ **Exercice 10** (Milieu) ....

Dans un repère orthonormé,

1. On considère deux points $E(7,-5)$ et $F(-8,-2)$.
   Calculer les coordonnées du milieu J du segment $[EF]$.
2. On considère deux points $G(-5,3)$ et $H(-9,4)$.
   Calculer les coordonnées du point K tel que H soit le milieu du segment $[GK]$.

★★☆☆☆ **Exercice 11** (Aire d'un triangle...) ....

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-4,2)$, $B(7,4)$ et $C(-3,-1)$

1. (a) Représenter graphiquement la situation.
   (b) Conjecturer la nature du triangle ABC.
   (c) Démontrer la conjecture.

2. (a) Calculer les coordonnées de D, le milieu de $[AC]$.
   (b) En déduire l'aire du triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées du centre du centre circonscrit au triangle ADB.
   *On rappelle que le **cercle circonscrit** d'un triangle est le cercle qui passe par les trois sommets de ce triangle.*

C - Figures géométriques

★★☆☆☆ **Exercice 12** (Quadrilatère) ....

Dans un repère orthonormé du plan, on a $A(-1,2)$, $B(6,-5)$, $C(-2,7)$ et $D(-9,14)$.

1. Représenter graphiquement la situation.
2. Que peut-on conjecturer sur le quadrilatère $ABCD$?
3. Valider ou invalider la conjecture précédente.

★★☆☆☆ **Exercice 13** (Cercle) ....

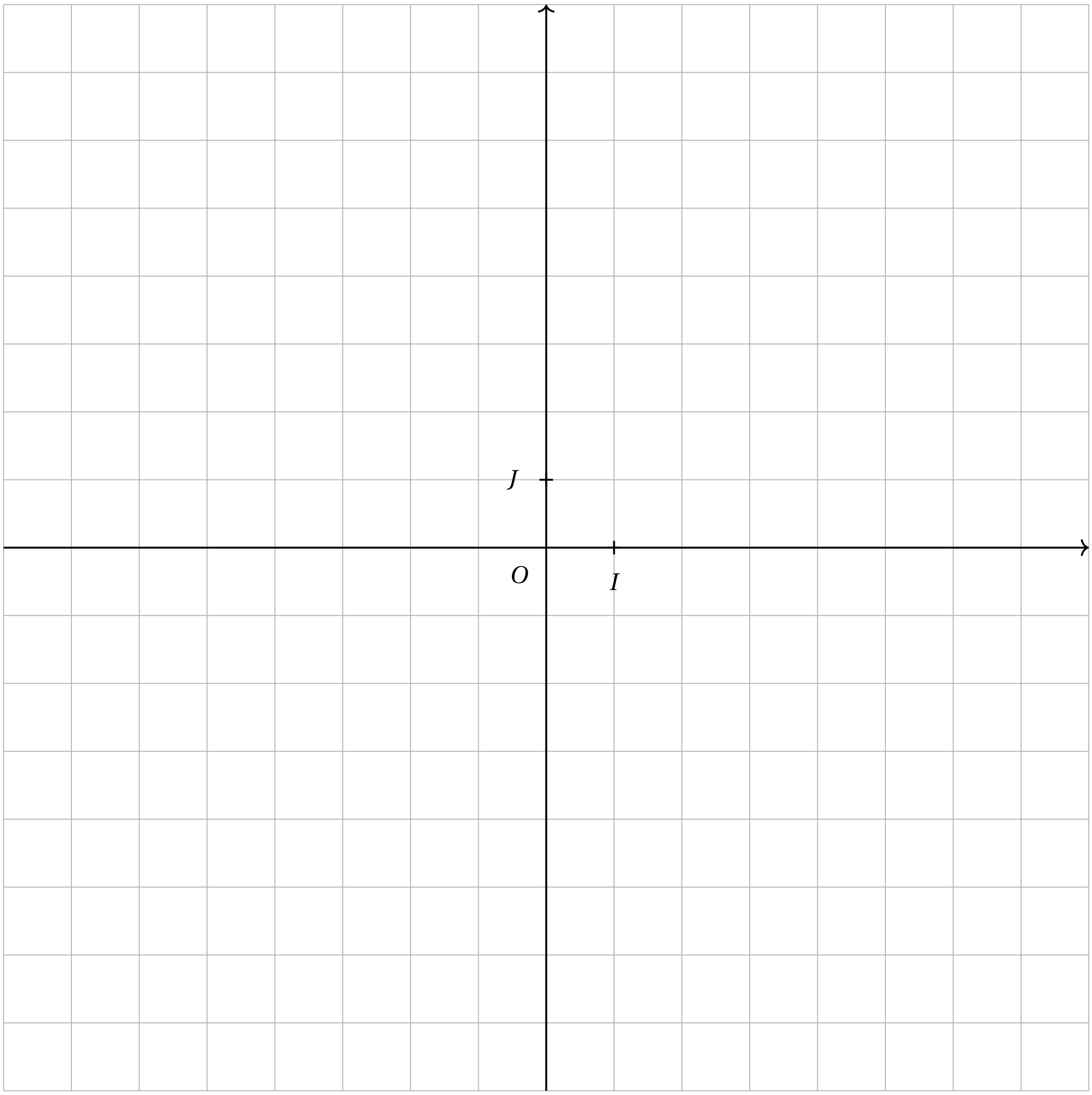
Dans un repère orthonormé du plan, on considère $\mathscr{C}$ le cercle de centre $I(1,2)$ et de rayon 5 et $M(5,5)$.

1. Calculer la distance IM.
2. Le point M appartient-il au cercle $\mathscr{C}$?
3. On considère maintenant le cercle $\mathscr{C}'$, de centre $A(-2,1)$ et passant par I.
   Déterminer le rayon de $\mathscr{C}'$.

★★☆☆☆ **Exercice 14** (Médiatrice) ....

Dans un repère orthonormé du plan, on considère trois points $A(-1,5)$, $B(3,1)$ et $M(-5,-3)$.

1. Calculer les distances MA et MB.
2. Expliquer pourquoi le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.


J
O
I