

Les ensembles de nombres

Plan du chapitre

I Les ensembles	2
A - Définitions	2
B - Opérations sur les ensembles	4
C - Connecteurs logiques	7
II Les ensembles de nombres	8
A - Entiers naturels	8
B - Entiers relatifs	8
C - Décimaux	9
D - Rationnels	10
E - Réels	11
III Inégalités et intervalles	12
A - Inégalités	12
B - Intervalles	14
C - Union et intersection d'intervalles	17
IV Exercices	19
A - Ensembles de nombres	19
B - Manipulations d'égalités et d'inégalités	19
C - Intervalles	20

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à décrire les ensembles de nombres notamment à l'aide d'intervalles, et à effectuer des opérations sur ces ensembles. Ces outils serviront particulièrement pour l'étude des fonctions et des inéquations.

Partie I Les ensembles

A - Définitions

Définition 1 : Ensemble

Un **ensemble** est une **collection (éventuellement infinie) d'objets** satisfaisant (ou non) un certain nombre de propriétés

Information : Cette définition n'est pas rigoureuse mais elle nous suffira pour l'année de seconde.

Définition 2 : Élément

On appelle **élément** d'un ensemble, **un objet qui appartient à cet ensemble**.

Exemple :

Voici quelques exemples d'ensemble :

- L'ensemble des jours de la semaine que l'on peut noter S est :

$$S = \{\text{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche}\}$$

- L'ensemble des fournitures dans votre trousse :

$$F = \{\text{stylo, crayon, gomme, règle}\}$$

- L'ensemble des nombres entiers positifs, nous le verrons dans la prochaine partie qu'il se note $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Voici un exemple d'ensemble contenant un nombre infini d'éléments.

- Un ensemble H dont les éléments sont différents et n'ont pas de relation particulière entre eux :

$$H = \{\text{pomme, voiture, 7, rouge}\}$$

- L'ensemble V des nombres réels x tel que : $x + 1 = x$ est un ensemble qui contient **aucun élément**. En effet, il n'existe aucun nombre réel x tel que $x + 1 = x$. Car sinon, :

$$x + 1 = x \Leftrightarrow 1 = 0$$

Et cette dernière égalité est fausse. On notera alors :

$$V = \emptyset$$

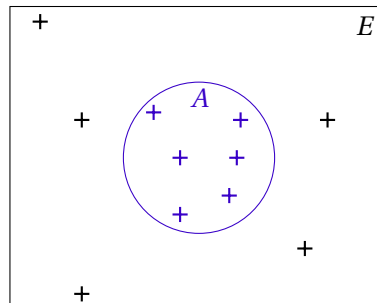
$\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément, on l'appelle l'**ensemble vide**.

- L'ensemble des chiffres : $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Définition 3 : Sous-ensemble

Un ensemble A est un **sous-ensemble** d'un ensemble E lorsque **tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble E** . On dira que A est **inclus** dans E ou que A est **une inclus** de E .

Information : Graphiquement la situation se représente ainsi :



On pourra écrire que $A \subset E$

Exemple :

L'ensemble des jours du week-end $W = \{\text{samedi, dimanche}\}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des jours de la semaine S que l'on a défini précédemment. On a $W \subset S$.

Erreur fréquente : Ne pas confondre $\subset$ et $\in$

Si A est un sous-ensemble de E on écrira jamais : ~~$A \in E$~~ , en effet le symbole d'appartenance est uniquement entre un élément et un ensemble. Alors que le symbole d'inclusion est entre deux ensembles.

Définition 4 : Singleton

L'ensemble E est appelé **singleton**, si E est constitué **d'un unique élément**.

Exemple :

L'ensemble de votre matière préférée est le singleton : **$\{\text{mathématiques}\}$**

Information : C'est généralement le type d'ensemble que vous avez obtenu lorsque vous avez résolu des équations jusqu'ici :

$$\begin{aligned}x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $x + 1 = 0$ est le singleton : $S = \{-1\}$.

Erreur fréquente : Ne pas confondre l'élément x et le singleton $\{x\}$

Les deux objets sont fondamentalement différents : l'un est élément (un objet) l'autre un ensemble (une boîte). Ça ne vous viendrait pas à l'esprit de confondre une paire de lunettes (élément) et son étui à lunettes (ensemble).

Nous avons deux grandes manières de définir un ensemble :

Définition 5 : Ensemble en extension

On dit qu'un ensemble est en **extension** quand on **énumère la liste de ses éléments**.

Information : C'est la façon la plus classique de définir les ensembles, par exemple c'est la manière qu'on a utilisé jusqu'ici pour définir nos ensembles.

Exemple :

- L'ensemble $A = \{1, 0, 4, -7\}$ est un ensemble en extension.
- Quand un professeur fait l'appel en début d'heure, il passe en revue l'ensemble des élèves de la classe, qui est, par définition, en extension.

Définition 6 : Ensemble en compréhension

On dit qu'un ensemble est en **compréhension** si on le définit par **la donnée d'une propriété (condition) caractéristique (à l'ensemble)** que doivent vérifier les éléments.

On écrit alors :

$$E = \{x \text{ / condition}\}$$

où x est **un élément** de l'ensemble E et "condition" est **une propriété mathématique**.

On lira : "l'ensemble des x tel que condition".

Exemple :

$S = \{x \text{ / } x + 1 = 0\}$ est l'ensemble en compréhension du singleton : $S = \{-1\}$.

En effet, **l'ensemble des nombres x tels que :**

$$x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

✂ À savoir faire 1 : Ensemble en extension, en compréhension

1. Donner une expression en extension de l'ensemble en compréhension suivant :

$\{x/x \text{ est un nombre entier, } x < 20, \text{ et } x \text{ est pair}\}$

.....

2. Donner une expression en extension de l'ensemble en compréhension suivant :

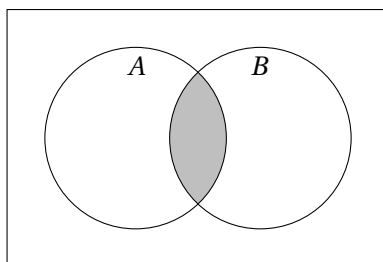
$\{(a, b)/a, b \text{ sont des nombres entiers et } 0 \leq a < b < 3\}$

.....

B - Opérations sur les ensembles**B.1 - Intersection****Définition 7 : Intersection**

Soient A et B deux ensembles, l'**intersection** de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent **à A et B** . On notera cet ensemble : $A \cap B$

i Information : La situation se représente ainsi :



À retenir :

- On retiendra que $A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$ est l'expression en compréhension de cet ensemble.
- L'intersection de deux ensembles peut être vide, ce qui signifie qu'il n'y a aucun élément commun entre les deux ensembles considérés.

Exemple :

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$ alors $A \cap B = \{2, 3\}$

À savoir faire 2 : Intersection

Dans chacun des cas suivants déterminer l'intersection des ensembles A et B :

1. $A = \{A, L, I, C, E\}$ et $B = \{B, E, N\}$.

.....

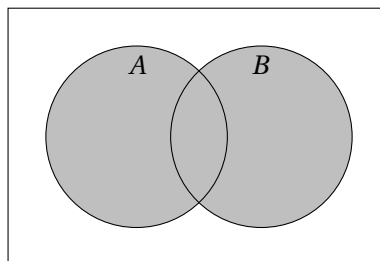
2. $A = \{A, D, E, M\}$ et $B = \{N, I, C, O\}$.

.....

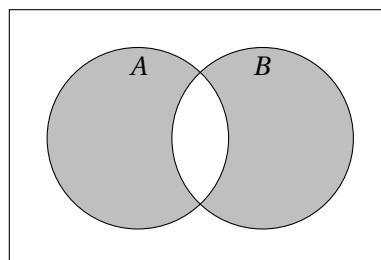
B.2 - Union**Définition 8 : Union**

Soient A et B deux ensembles, l'**union** de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à **A ou B** .

Information : La situation se représente ainsi :

**À retenir :**

- Le "ou" est inclusif, cela veut dire que l'on peut appartenir à A ou à B ou aux deux à la fois, c'est-à-dire appartenir à $A \cup B$.
 Alors que dans la vie courante le "ou" est exclusif c'est-à-dire, qu'on peut appartenir à A ou appartenir à B mais pas les deux à la fois. Graphiquement :



Le "ou" dans la vie courante

- On retiendra que $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est l'expression en compréhension de cet ensemble.

Exemple :

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$ alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

✂ À savoir faire 3 : Union

En reprenant les deux premières questions du **À savoir faire** précédent, donner l'union des ensembles considérés.

.....

.....

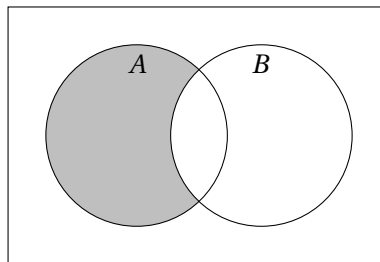
.....

.....

B.3 - Différence**Définition 9 : Différence**

Soient A et B deux ensembles, on appelle **différence** de A et B , que l'on notera $A \setminus B$ l'ensemble **des éléments de A qui ne sont pas dans B** .

i Information : La situation se représente ainsi :



💡 À retenir : On peut aussi dire : " A privé de B ", c'est-à-dire ce qu'il reste dans A quand on enlève les éléments de B .

Exemple :

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$ alors : $A \setminus B = \{1\}$
- En gardant les mêmes ensembles A et B on a : $B \setminus A = \{4\}$

On remarque alors que la différence n'est pas symétrique, tout comme pour la différence de deux nombres que vous connaissez depuis petit.

✂ À savoir faire 4 : Différence

1. Considérons deux ensembles $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3\}$, déterminer leurs deux différences :

.....

.....

2. Considérons deux ensembles $A = \{A, D, E, M\}$ et $B = \{N, I, C, O\}$ déterminer $A \setminus B$:

.....

.....

✂ À savoir faire 5 : Mélange opérations ensembles

Soient $E = \{O, R, A, N, G, E\}$ et V la partie de E contenant les voyelles.

1. Déterminer les éléments de V et de $E \setminus V$.

.....

2. Soit A la partie de E qui contient des lettres du mot RAPIDE;

- (a) Déterminer les éléments de A ;

.....

- (b) Peut-on écrire $A \subset V$?

.....

- (c) Déterminer $A \cap V$

.....

C - Connecteurs logiques

Définition 10 : Assertion

Une **assertion** est un énoncé (une phrase) mathématique pouvant être vrai ou faux.

Exemple :

- « $1 > 0$ » est une assertion vraie.
- « $3^2 = 6$ » est une assertion fausse.
- Pour A, B, C et D des points du plan : « $(AB) > (CD)$ » n'est pas une assertion car il n'y a pas de relation d'ordre entre les droites du plan.

Définition 11 : Connecteurs logiques

- L'assertion « $P \wedge Q$ », que l'on lit : « P et Q » est vraie lorsque P et Q sont simultanément vraies.
- L'assertion « $P \vee Q$ », que l'on lit : « P ou Q » est vraie lorsque P est vraie ou quand Q est vraie ou quand les deux assertions sont simultanément vraies.

À retenir : Le connecteur logique « ou » est inclusif en mathématiques, contrairement au sens du langage courant.

Par exemple : Dans un restaurant, si un menu affiche « fromage ou dessert », le client a choix entre soit du fromage soit un dessert, mais pas les deux à la fois. Dans le monde mathématiques, le « ou » étant inclusif, il accepte le choix « fromage et dessert ».

Exemple :

- L'assertion : « $3 \leq 4$ » est l'assertion « $(3 < 4) \vee (3 = 4)$ » comme l'une des deux assertions est vraie (ici $3 < 4$) on a alors l'assertion de départ qui est vraie.
- Notons maintenant deux propositions P : « $3 \leq 4$ » et Q : « $4 > 5$ »;
 - L'assertion P est
 - L'assertion Q est

- L'assertion $P \vee Q$ est
- L'assertion $P \wedge Q$ est

✂ À savoir faire 6 : Déterminer la valeur de vérité d'une assertion mathématique

Déterminer la valeur de vérité de chaque des assertions suivantes

1. « Je vis sur Mars ou je fais actuellement des mathématiques » :

.....

2. « Je supporte l'Olympique Lyonnais et je respire » :

.....

3. « Je suis un chat ou je suis mortel » :

.....

Partie II Les ensembles de nombres

A - Entiers naturels

Définition 12 : Entier naturel

Un nombre **entier naturel** est un nombre entier qui est positif.

L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et on a :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Information :

- Le $\mathbb{N}$ vient de l'italien "*Naturale*" (naturel)
- Les "..." traduit le fait que l'ensemble des entiers naturels a une infinité d'éléments.

Exemple :

On a $15 \in \mathbb{N}$, $10^3 \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$ mais $-2 \notin \mathbb{N}$

B - Entiers relatifs

Définition 13 : Entier relatif

Un nombre **entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif.

L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{Z}$ et on a :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Information :

- Le $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand "*Zahlen*" (nombre)
- On a clairement : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Exemple :

On a $-2 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{Z}$ et $-\sqrt{49} \in \mathbb{Z}$ mais $-0,5 \notin \mathbb{Z}$

✂ À savoir faire 7 : Montrer qu'un nombre est un entier

Montrer que $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{25}}{2} \in \mathbb{Z}$:

.....

.....

.....

.....

.....

C - Décimaux

Définition 14 : Décimal

Un nombre **décimal** est **un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^p}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$** .
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$ et on a :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^p} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{N} \right\}$$

i Information :

- Le $\mathbb{D}$ vient du français "Décimale"
- On peut alors affirmer que tout nombre décimale s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule, sa partie décimale est finie.
- On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Exemple :

On a $0,5 \in \mathbb{D}$, $\frac{3}{25} \in \mathbb{D}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

* Erreur fréquente : Pour prouver qu'un nombre est décimale il faut utiliser la définition!

Pour prouver qu'un nombre est décimal on utilisera bien la définition. Par exemple pour affirmer que $0,5 \in \mathbb{D}$, il faut écrire $0,5$ sous la forme $\frac{a}{10^p}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas : $0,5 = \frac{5}{10}$ où $a = 5 \in \mathbb{Z}$ et $p = 1 \in \mathbb{N}$.

✂ À savoir faire 8 : Montrer qu'un nombre est décimal

1. Montrer que $0,8 \in \mathbb{D}$:

.....

.....

.....

.....

2. Montrer que $\frac{3}{25} \in \mathbb{D}$:

.....

.....

.....

.....

3. Justifier que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$:

.....

Propriété 1 :

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal, on note alors : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Démonstration (à connaître) :

Nous allons utiliser le **raisonnement par l'absurde** pour prouver que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, le raisonnement par l'absurde consiste ici à supposer que le résultat est vrai et aboutir à une absurdité. Ce qui voudra dire que ce que l'on a supposé vrai au départ est en fait faux.

Dans notre cas, supposons par l'absurde que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Par définition de l'ensemble des nombres décimaux, on a alors qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$$

On a alors : $10^p = 3a$, donc 10^p est divisible par 3 ce qui est **ABSURDE**. En effet, car la somme des chiffres composant 10^p est 1 (les chiffres composant 10^p sont 1 et p zéros) qui n'est pas divisible par 3 donc 10^p n'est pas divisible par 3.

Nous avons donc bien abouti à une absurdité ce qui nous permet de conclure que l'hypothèse faite au départ : $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ est fausse.

D'où la conclusion de ce raisonnement est : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ ■

D - Rationnels**Définition 15 : Rationnel**

Un nombre **rationnel** peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ et on a :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Information :

- Le $\mathbb{Q}$ vient de l'italien "Quotiente" (fraction)
- On a $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- On peut simplifier un peu l'écriture d'un rationnel en supposant uniquement que $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Exemple :

On a $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Q}$, $-4, 8 \in \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On prouvera ce dernier point, plus tard dans l'année.)

À savoir faire 9 : Montrer qu'un nombre est rationnel

1. Montrer que $0 \in \mathbb{Q}$:

.....

2. Montrer que $-4,8 \in \mathbb{Q}$:

.....

3. Justifier que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$:

.....

E - Réels

Définition 16 : Réel (intuitive)

Un nombre est **réel** s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée droite réelle.
 L'ensemble des nombres réels est donc l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.
 On notera l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Information :

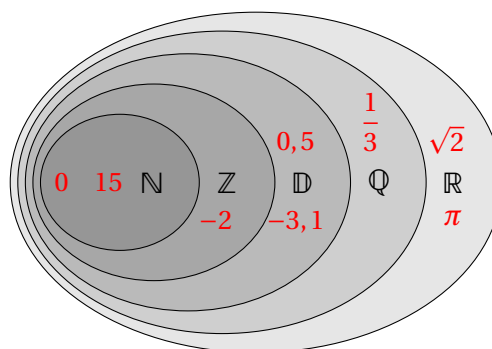
- Le $\mathbb{R}$ vient de l'allemand "Real".
- On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

À retenir : C'est l'ensemble contenant tous les nombres que vous connaissez.

Exemple :

On a $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$, $-3,214536... \in \mathbb{R}$. Ici nous n'avons pas d'exemple de nombre connu (pour nous) n'appartenant pas à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Pour conclure voici un **diagramme de Venn** représentant les inclusions entre les différents ensemble de nombre :



Définition 17 : Nature

La **nature** d'un nombre, c'est le premier ensemble auquel il appartient.

Exemple :

La nature de $\frac{4}{2}$ est $\mathbb{N}$ car en effet c'est un rationnel, et même un réel (comme tous les nombres) mais $\frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{N}$. Donc le premier ensemble auquel il appartient est $\mathbb{N}$ qui est sa nature.

✂ À savoir faire 10 : Déterminer la nature d'un nombre

Compléter le tableau suivant, en mettant une croix dès lors que le nombre appartient à l'ensemble et entourer la croix donnant la nature du nombre :

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-\frac{5}{2}$					
$\frac{6}{2}$					
$\sqrt{121}$					
$4,5 \times 10^{-4}$					
2π					
$\sqrt{7}$					
$\frac{7}{9}$					

Partie III Inégalités et intervalles

A - Inégalités

Définition 18 : Ordre

Soient a et b deux réels, on dit que :

- a est égal à b , et on note $a = b$, si, et seulement si, $a - b = 0$
- a est inférieur ou égal à b , et on note $a \leq b$, si, et seulement si, $a - b \leq 0$
- a est supérieur ou égal à b , et on note $a \geq b$, si, et seulement si, $a - b \geq 0$

📌 Information :

- On obtient les cas d'**inférieur strictement** ($<$) et **supérieur strictement** ($>$) en remplaçant les inégalités larges ($\leq$ et $\geq$) par des inégalités strictes ($<$ et $>$).
- Cette définition est très importante et à retenir car elle donne la méthode pour établir une inégalité : il faut étudier le signe de la différence entre les deux membres!

✂ À savoir faire 11 : Établir une inégalité

Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x^2 + 1 \geq 2x$:

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 19 : Addition

Soient a, b et c trois nombres réels. Si $a < b$ alors $a + c < b + c$.

💡 **À retenir :** En d'autres termes, ajouter un même nombre à chaque membre d'une inégalité **ne change pas le sens de l'inégalité**.

i Information :

- Bien entendu, si $a = b$ alors $a + c = b + c$, et donc $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Nous avons équivalence dans cette propriété :

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

C'est-à-dire que si l'on sait que : $a + c < b + c$ on peut alors affirmer que $a < b$.

Propriété 2 : Opérations sur les inégalités

Soient a, b, c et d des réels, on a :

- **Somme membre à membre d'inégalités :** si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$;
- **Multiplier une inégalité par un nombre strictement positif :** si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$;
Nous avons même une équivalence ici.
- **Multiplier une inégalité par un nombre strictement négatif :** si $a < b$ et $c < 0$ alors $ac > bc$;
Nous avons même une équivalence ici.
- **Multiplier membre à membre deux inégalités de réels positifs :** si $0 < a < b$ et $0 < c < d$ alors $ac < bd$

i Information : Bien entendu, le cas d'inégalité large ($\leq$ ou $\geq$) est vérifié à chaque fois étant donné que le cas d'égalité est vrai.

Exemple :

- Si $x < 6$ et $y < 4$ on a alors $x + y < 10$;
- Si $x < 2$ alors $5x < 10$ et $-3x > -6$;
- Si $0 < x < y$, comme $0 < 3 < 5$, on a alors : $0 < 3x < 5y$.

💡 À retenir :

- On peut ajouter membre à membre des inégalités et si l'une d'entre elles est stricte, alors l'inégalité obtenue l'est aussi;
- Multiplier une inégalité par un nombre strictement positif **préserve le sens de l'inégalité**;
- Multiplier une inégalité par un nombre strictement négatif **renverse le sens de l'inégalité**;
- On peut multiplier membre à membre des inégalités de réels **positifs**.

🚫 Erreur fréquente : On ne peut pas soustraire des inégalités membres à membres

L'assertion :

~~« Si $a < b$ et $c < d$ alors $a - c < b - d$ »~~

est **FAUSSE!**

Voici un contre-exemple : $4 < 5$ et $-2 < 3$ alors $4 - (-2) = 6$ et $5 - 3 = 2$ pourtant on vient bien que $4 - (-2) \not< 5 - 3$. Petite explication, pour mieux sentir le soucis : soustraire membre à membre deux inégalités revient d'abord à multiplier par -1 une inégalité, c'est-à-dire passer de $-2 < 3$ à $2 > -3$ (on change alors le sens de l'inégalité) puis à ajouter les deux inégalités. Et le problème intervient lorsque l'on cherche à ajouter les nouvelles inégalités car on a alors une condition importante de la propriété : **les deux inégalités doivent avoir le même sens d'inégalité.**

✂ À savoir faire 12 : Manipuler les inégalités

1. Démontrer que, pour tous nombres réels x et y vérifiant : $x \leq 1$ et $y \leq 2$, on a $4x + 3y \leq 10$

.....

.....

.....

.....

2. Démontrer que, pour tous nombres réels x et y vérifiant : $x \geq 4$ et $y \geq 1$, on a $3 + xy \geq 7$

.....

.....

.....

.....

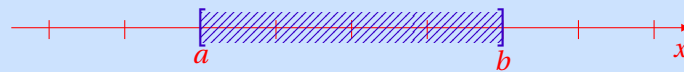
B - Intervalles

Définition 20 : Intervalle fermé

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$. On appelle **intervalle fermé**, que l'on notera $[a, b]$ l'ensemble des réels x tels que : $a \leq x \leq b$. On a alors :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

On représentera cet intervalle fermé de la façon suivante :



Exemple :

L'intervalle fermé $[-1, 3]$ est l'ensemble des nombres réels compris entre -1 et 3 au sens large, c'est-à-dire :

$$[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 3\}$$

Graphiquement on a :



On a alors $0 \in [-1, 3]$, $\frac{2}{3} \in [-1, 3]$ mais $\pi \notin [-1, 3]$

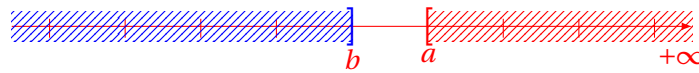
i Information : Que se passe-t-il lorsque $a = b$

L'intervalle $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq a\} = \{a\}$, devient un **singleton**.

⚠ Attention : Que se passe-t-il lorsque $a > b$

L'intervalle $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} = \emptyset$, devient vide car il n'existe aucun $x \geq a$ et $x \leq b$ car $a > b$.

Graphiquement il faut être dans l'intervalle bleu et dans l'intervalle rouge :



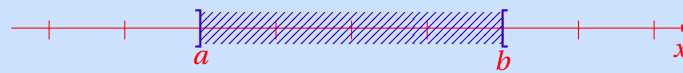
On retiendra bien qu'un intervalle du type $[2, 1]$ n'existe pas !

Définition 21 : Intervalle ouvert

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle **intervalle ouvert**, que l'on notera $]a, b[$ l'ensemble des réels x tels que : $a < x < b$. On a alors :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

On représentera cet intervalle ouvert de la façon suivante :



⚡ À retenir : La différence entre l'intervalle fermé et l'intervalle ouvert ? La seule différence entre l'intervalle fermé $[a, b]$ et l'intervalle $]a, b[$ est l'inclusion ou non des bornes. Dans le premier les bornes sont comprises dans l'ensemble de nombre considéré, dans le second les bornes ne le sont pas. Concrètement nous avons :

$$]a, b[= [a, b] \setminus \{a, b\}$$

L'intervalle ouvert c'est l'intervalle fermé auquel on a retiré les deux bornes.

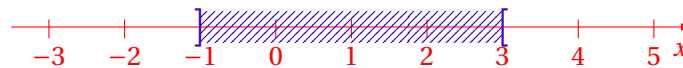
On impose que $a < b$, car si $a = b$ on a alors $]a, b[=]a, a[= \emptyset$, de la même manière que précédemment si $a > b$ l'intervalle ouvert est alors vide.

Exemple :

L'intervalle ouvert $] -1, 3[$ est l'ensemble des nombres réels compris entre -1 et 3 au sens large, c'est-à-dire :

$$]-1, 3[= \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\}$$

Graphiquement on a :



On a $-1 \notin] -1, 3[$ et $3 \notin] -1, 3[$

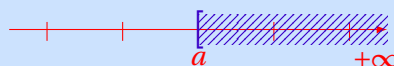
Définition 22 : Intervalles non bornés

Soit $a \in \mathbb{R}$,

- L'intervalle $[a, +\infty[$ est l'ensemble des nombres x tels que $x \geq a$. On a alors :

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

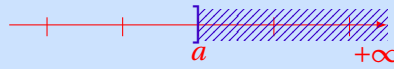
Graphiquement on a :



- L'intervalle $]a, +\infty[$ est l'ensemble des nombres x tels que $x > a$. On a alors :

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

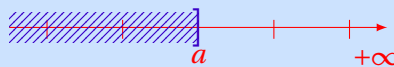
Graphiquement on a :



- L'intervalle $] -\infty, a]$ est l'ensemble des nombres x tels que $x \leq a$. On a alors :

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$

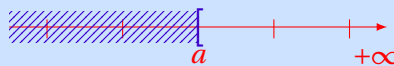
Graphiquement on a :



- L'intervalle $] -\infty, a[$ est l'ensemble des nombres x tels que $x < a$. On a alors :

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$

Graphiquement on a :



❗ Information : Crochet ouvert en $\pm\infty$

$+\infty$ se lit "+ infini" et $-\infty$ se lit "- infini", ce ne sont pas des nombres. Il est impossible de les atteindre, donc par définition nous mettrons toujours des crochets ouverts en $\pm\infty$.

✂ À savoir faire 13 : Manipuler représentation, inégalité d'un intervalle.

Compléter le tableau suivant :

Représentation	Inégalité	Intervalle
	...	...
	$-9 \leq x < -7$	...
	...	$] -1, 1]$
	$x > 11$	...
	...	$] -\infty, 2[$

💡 À retenir : Cas particulier

• $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

• $] -\infty, 0] = \mathbb{R}_-$

• $[0, +\infty[= \mathbb{R}_+$

• $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

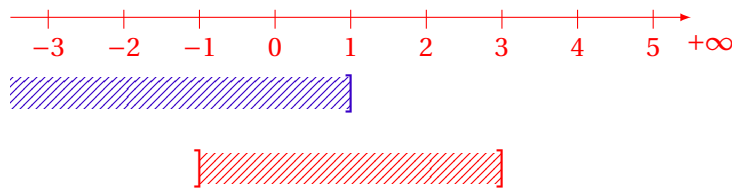
C - Union et intersection d'intervalles

Voyons sur plusieurs exemples comment déterminer l'union et l'intersection de deux intervalles.

Exemple :

Soit $I_1 =] -\infty, 1]$ et $I_2 =] -1, 3]$.

Pour déterminer l'union et l'intersection de A et B on peut penser à représenter ces deux intervalles sur une droite graduée.



Pour obtenir :

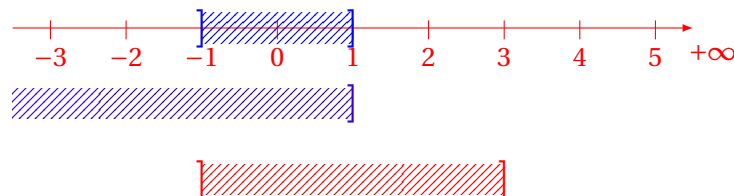
- L'intersection $I_1 \cap I_2$:

- Nous allons d'abord chercher la zone présente dans les deux intervalles représentés, ici c'est la zone entre -1 et 1.
- Par la suite nous faisons l'étude des bornes pour connaître le sens des crochets.
 - En -1, comme $-1 \notin I_2$ car c'est un crochet ouvert, on a alors : $-1 \notin I_1 \cap I_2$ (car il faut être dans les deux pour être dans l'intersection !) ainsi nous avons un crochet ouvert en -1

$$]-1, 1$$

- En 1, comme $1 \in I_1$ et $1 \in I_2$ on a alors : $1 \in I_1 \cap I_2$ ainsi nous avons un crochet fermé en 1

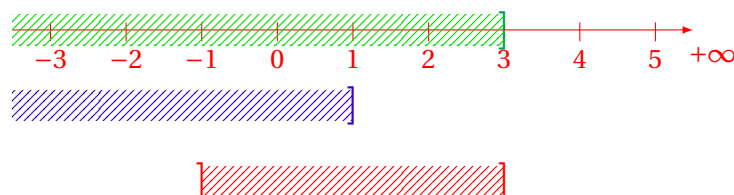
$$I_1 \cap I_2 =] -1, 1]$$



- L'union $I_1 \cup I_2$:

- Nous allons d'abord chercher la zone recouvrant I_1 ou I_2 , ici c'est la zone entre $-\infty$ et 3.
- Par la suite nous faisons l'étude des bornes pour connaître le sens des crochets.
 - En $-\infty$, par définition crochet ouvert
- En 3, comme $3 \in I_2$ on a alors : $3 \in I_1 \cup I_2$ (car pour être dans l'union il suffit d'être dans au moins l'un des deux) ainsi nous avons un crochet fermé en 3

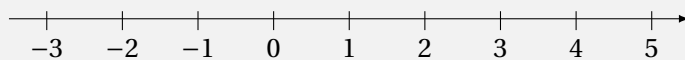
$$I_1 \cup I_2 =] -\infty, 3]$$



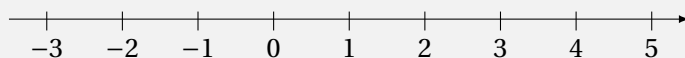
✂ À savoir faire 14 : Déterminer l'union et l'intersection de deux intervalles

Représenter et déterminer l'union et l'intersection de chacun des couples d'intervalles suivant :

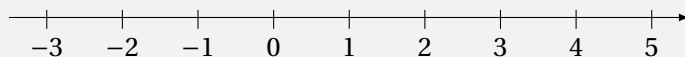
1. Pour $I_1 =]-1, 2]$ et $I_2 =]0, 3[$



2. Pour $I_1 = [-1, 1[$ et $I_2 =]2, 3[$



3. Pour $I_1 =]-\infty, 2]$ et $I_2 =]2, +\infty[$



Partie IV Exercices

A - Ensembles de nombres

★★★☆☆ EXERCICE 1 (Nature) ⌚

Déterminer la nature de chacun des nombres suivants :

- | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------|--------------------------------|
| 1. $\frac{81}{4}$ | 4. $-\frac{9}{60}$ | 7. $\frac{\pi}{4}$ | 10. $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)$ |
| 2. $\frac{15}{5}$ | 5. $-\frac{5}{4}$ | 8. $\frac{5\pi}{4\pi}$ | 11. 5×10^{-3} |
| 3. $-\frac{1}{3}$ | 6. 5×10^4 | 9. $\sqrt{0,81}$ | 12. $\frac{2}{10^{-2}}$ |

★★★☆☆ EXERCICE 2 (Tableau) ⌚

Compléter le tableau ci-dessous, dans lequel une croix signifie que le nombre appartient à l'ensemble correspondant. On entourera la croix donnant la nature de chaque nombre.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
7					
$-\frac{28}{4}$					
9×10^{-4}					
$\frac{\pi}{4}$					
$\sqrt{400}$					
$\frac{5}{6}$					

B - Manipulations d'égalités et d'inégalités

★★★☆☆ EXERCICE 3 (Égalité) ⌚

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$, montrer que : $\frac{3x^2 + 16x + 8}{x^2 + x - 2} = \frac{5x + 4}{x - 1} - \frac{2x}{x + 2}$.
- Soient R et $S \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{S}} = \frac{RS}{R + S}$

★★★☆☆ EXERCICE 4 (Inégalités) ⌚

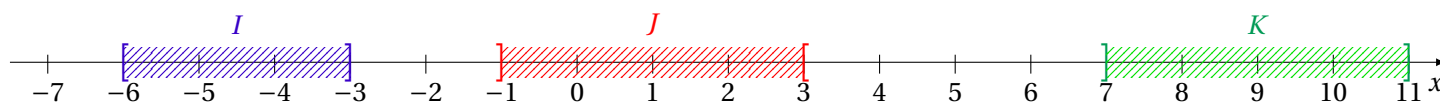
- Démontrer que, pour tous nombres réels x et y vérifiant : $x \geq 3$ et $y \geq 1$, on a $4x + 2y \geq 14$
- Démontrer que, pour tous nombres réels x et y vérifiant : $x \leq 10$ et $y \geq 1$, on a $2x - 4y \leq 16$
- Démontrer que, pour tous nombres réels x et y vérifiant : $x \leq 1$ et $y \leq 1$, on a $\frac{3}{2}x + \frac{y}{2} \leq 2$

4. Démontrer que, pour tous nombres réels x et y vérifiant : $x < 6$ et $y > -10$, on a $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} < 4$
5. Démontrer que, pour tous nombres réels x et y vérifiant : $x < 2$ et $y < -2$, on a $-3x - 2y > -2$
6. Démontrer que, pour tous nombres réels x et y vérifiant : $0 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 0$, on a $-2 \leq 4x + 2y \leq 4$
7. Considérons x et y deux nombres réels vérifiant : $-1 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$
- (a) Démontrer que : $-\frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{3}{4}$
- (b) Démontrer que : $-\frac{3}{2} \leq x - y \leq 1$

C - Intervalles

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Représentations) (✓)

On a représenté trois intervalles I, J et K sur la droite graduée ci-dessous :



Compléter les équivalences suivantes :

1. $x \in I \Leftrightarrow x \in \dots \Leftrightarrow \dots \leq x \leq \dots$ 2. $x \in J \Leftrightarrow x \in \dots \Leftrightarrow \dots x \dots$ 3. $x \in K \Leftrightarrow x \in \dots \Leftrightarrow \dots x \dots$

★★★☆☆ EXERCICE 6 (Tableau) (✓)

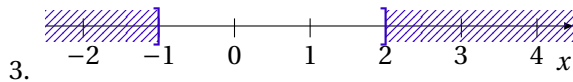
Compléter le tableau suivant, à l'aide d'un intervalle, d'une inégalité ou d'une représentation :

Représentation	Inégalité	Intervalle
	...	...
	$-3 < x \leq 0$	...
	...	$[-4, 2[$
	$x < 3$	...
	...	$]9, +\infty[$

★★★☆☆ EXERCICE 7 (Représentations #2) (✓)

Dans chaque cas déterminer avec un ou des intervalles l'ensemble représenté :

- 1.
- 2.



★★★☆☆ EXERCICE 8 (Appartenance) ⌚

Recopier et compléter par $\in$ ou $\notin$

- | | | | |
|----------------------------------|-------------------------|----------------------------------|--|
| 1. $-2,5 \dots [-3, 5]$ | 3. $-7 \dots] -6, -3[$ | 5. $0 \dots] 0, +\infty[$ | 7. $1, 3 \dots [-5, 0[\cup] 2, +\infty[$ |
| 2. $\frac{\pi}{2} \dots [-3, 3[$ | 4. $1 \dots [1, 6[$ | 6. $10^{-1} \dots] -\infty, 0]$ | 8. $-4 \dots [-3, +\infty[$ |

★★★☆☆ EXERCICE 9 (Union/ Intersection) ⌚

Considérons les intervalles $I = [-2, 4]$, $J = [-5, 2]$ et $K =] -3, 5[$ Déterminer et représenter sur une droite graduée :

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------------|
| 1. $L = I \cap J$ | 2. $M = I \cup J$ | 3. $N = K \cap I$ | 4. $P = I \cap J \cap K$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------------|

★★★☆☆ EXERCICE 10 (Union/ Intersection #2) ⌚

Dans chacun des cas, représenter les intervalles donnés I et J sur une droite graduée, puis exprimer sous forme d'intervalles $I \cap J$ et $I \cup J$.

- | | |
|---|--|
| 1. $I = [-4, 2]$ et $J = [-1, 6]$ | 3. $I =] -\infty, 7]$ et $J =] -\infty, 4]$ |
| 2. $I =] -\infty, 3]$ et $J = [-2, +\infty[$ | 4. $I =] -\infty, -1]$ et $J = [-1, +\infty[$ |

VRAI OU FAUX ?



a) $\sqrt{256} \in \mathbb{N}$

☐ ☐

b) 0,03 est un nombre rationnel

☐ ☐

c) Si $x \in \mathbb{Z}$ alors $x^2 \in \mathbb{Z}$

☐ ☐

d) Si $x = -\sqrt{2}$ et $y = 2$ alors $3x^2 - 4y \in \mathbb{N}$

☐ ☐

e) Si $x \in \mathbb{D}^*$ alors l'inverse de x est décimal

☐ ☐

f) Si $x = \frac{3}{2}$ alors $\frac{-2x}{x+1} \in \mathbb{Z}$

☐ ☐

g) Le carré d'un nombre irrationnel n'est jamais rationnel

☐ ☐



h) Le quotient de deux nombres décimaux non nuls est un nombre décimal

☐ ☐

i) L'inverse d'un nombre décimal non nul n'est jamais un nombre entier

☐ ☐

j) Si $x \in \mathbb{D}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$ alors $\frac{x}{n} \in \mathbb{D}$

☐ ☐

k) $-1 \in [-5; -2]$

☐ ☐

l) $0 \in]0; -2]$

☐ ☐

m) $-1 \notin]-1, 3]$

☐ ☐

n) $] -\infty, 2[\cup [2, +\infty[= \mathbb{R}$

☐ ☐

o) $[1, 5[\cap]5, 8[= \{8\}$

☐ ☐

p) $] -\infty, 4[\cap]4, +\infty[= \emptyset$

☐ ☐

q) $[2, 6[\cap]6, 9] = \{6\}$

☐ ☐