

# Les ensembles de nombres

## Plan du chapitre

|                                              |           |
|----------------------------------------------|-----------|
| <b>I Les ensembles</b>                       | <b>2</b>  |
| A - Définitions                              | 2         |
| B - Opérations sur les ensembles             | 4         |
| C - Connecteurs logiques                     | 7         |
| <b>II Les ensembles de nombres</b>           | <b>8</b>  |
| A - Entiers naturels                         | 8         |
| B - Entiers relatifs                         | 8         |
| C - Décimaux                                 | 9         |
| D - Rationnels                               | 10        |
| E - Réels                                    | 11        |
| <b>III Inégalités et intervalles</b>         | <b>12</b> |
| A - Inégalités                               | 12        |
| B - Intervalles                              | 14        |
| C - Union et intersection d'intervalles      | 17        |
| <b>IV Exercices</b>                          | <b>19</b> |
| A - Ensembles de nombres                     | 19        |
| B - Manipulations d'égalités et d'inégalités | 19        |
| C - Intervalles                              | 20        |

# Introduction

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à décrire les ensembles de nombres notamment à l'aide d'intervalles, et à effectuer des opérations sur ces ensembles. Ces outils serviront particulièrement pour l'étude des fonctions et des inéquations.

## Partie I Les ensembles

## A - Définitions

## Définition 1 : Ensemble

Un **ensemble** est une ..... satisfaisant (ou non) un certain nombre de propriétés

**Information :** Cette définition n'est pas rigoureuse mais elle nous suffira pour l'année de seconde.

## Définition 2 : Élément

On appelle **élément** d'un ensemble, .....

**Example :**

Voici quelques exemples d'ensemble :

- L'ensemble des jours de la semaine que l'on peut noter  $S$  est :

$$S = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \}$$

- L'ensemble des fournitures dans votre trousse :

$$F = \{\text{stylo, crayon, gomme, règle}\}$$

- L'ensemble des nombres entiers positifs, nous le verrons dans la prochaine partie qu'il se note  $\mathbb{N}$  :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Voici un exemple d'ensemble contenant un nombre infini d'éléments.

- Un ensemble  $H$  dont les éléments sont différents et n'ont pas de relation particulière entre eux :

$$H = \{\text{pomme, voiture, 7, rouge}\}$$

- L'ensemble  $V$  des nombres réels  $x$  tel que :  $x+1 = x$  est un ensemble qui contient .....  
En effet, il n'existe aucun nombre réel  $x$  tel que  $x+1 = x$ . Car sinon, :

$$x + 1 = x \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Et cette dernière égalité est fausse. On notera alors :

$$V = \dots\dots\dots$$

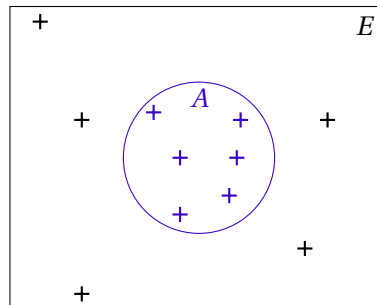
$\emptyset$  est l'ensemble ne contenant aucun élément, on l'appelle l'.....

- L'ensemble des chiffres :  $C = \{., ....., ., ....., ., ....., ., ....., ., ....., ., ....., .\}$

**Définition 3 : Sous-ensemble**

Un ensemble  $A$  est un **sous-ensemble** d'un ensemble  $E$  lorsque .....  
 ..... On dira que  $A$  est ..... dans  $E$  ou que  $A$  est ..... de  $E$ .

**Information :** Graphiquement la situation se représente ainsi :



On pourra écrire que  $A \subset E$

**Exemple :**

L'ensemble des jours du week-end  $W = \{\text{samedi, dimanche}\}$  est un sous-ensemble de l'ensemble des jours de la semaine  $S$  que l'on a défini précédemment. On a  $W \subset S$ .

**Erreur fréquente :** Ne pas confondre  $\subset$  et  $\in$

Si  $A$  est un sous-ensemble de  $E$  on écrira jamais :  ~~$A \in E$~~ , en effet le symbole d'appartenance est uniquement entre un élément et un ensemble. Alors que le symbole d'inclusion est entre deux ensembles.

**Définition 4 : Singleton**

L'ensemble  $E$  est appelé **singleton**, si  $E$  est constitué .....

**Exemple :**

L'ensemble de votre matière préférée est le singleton : {.....}

**Information :** C'est généralement le type d'ensemble que vous avez obtenu lorsque vous avez résolu des équations jusqu'ici :

$$x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation  $x + 1 = 0$  est le singleton :  $S = \{-1\}$ .

**Erreur fréquente :** Ne pas confondre l'élément  $x$  et le singleton  $\{x\}$

Les deux objets sont fondamentalement différents : l'un est élément (un objet) l'autre un ensemble (une boîte). Ça ne vous viendrait pas à l'esprit de confondre une paire de lunettes (élément) et son étui à lunettes (ensemble).

Nous avons deux grandes manières de définir un ensemble :

**Définition 5 : Ensemble en extension**

On dit qu'un ensemble est en **extension** quand on .....

**Information :** C'est la façon la plus classique de définir les ensembles, par exemple c'est la manière qu'on a utilisé jusqu'ici pour définir nos ensembles.

**Exemple :**

- L'ensemble  $A = \{1, 0, 4, -7\}$  est un ensemble en extension.
- Quand un professeur fait l'appel en début d'heure, il passe en revue l'ensemble des élèves de la classe, qui est, par définition, en extension.

**Définition 6 : Ensemble en compréhension**

On dit qu'un ensemble est en **compréhension** si on le définit par .....  
 ..... que doivent vérifier les éléments.

On écrit alors :

$$E = \dots\dots\dots$$

où  $x$  est ..... de l'ensemble  $E$  et "condition" est .....

On lira : "*l'ensemble des  $x$  tel que condition*".

**Exemple :**

$S = \{x / x + 1 = 0\}$  est l'ensemble en compréhension du singleton :  $S = \{-1\}$ .

En effet, .....

$$\dots\dots\dots = \dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots = \dots\dots$$

**✂ À savoir faire 1 : Ensemble en extension, en compréhension**

1. Donner une expression en extension de l'ensemble en compréhension suivant :

$\{x/x \text{ est un nombre entier, } x < 20, \text{ et } x \text{ est pair}\}$

.....  
 .....

2. Donner une expression en extension de l'ensemble en compréhension suivant :

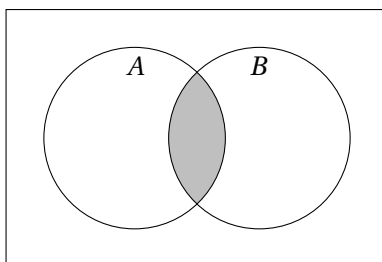
$\{(a, b)/ a, b \text{ sont des nombres entiers et } 0 \leq a < b < 3\}$

.....  
 .....

**B - Opérations sur les ensembles****B.1 - Intersection****Définition 7 : Intersection**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles, l'**intersection** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent ..... On notera cet ensemble : .....

**i Information :** La situation se représente ainsi :



**À retenir :**

- On retiendra que  $A \cap B = \dots\dots\dots$  est l'expression en compréhension de cet ensemble.
- L'intersection de deux ensembles peut être vide, ce qui signifie qu'il n'y a aucun élément commun entre les deux ensembles considérés.

**Exemple :**

Soient  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{2, 3, 4\}$  alors  $A \cap B = \dots\dots\dots$

**À savoir faire 2 : Intersection**

Dans chacun des cas suivants déterminer l'intersection des ensembles  $A$  et  $B$  :

1.  $A = \{A, L, I, C, E\}$  et  $B = \{B, E, N\}$ .

.....  
 .....

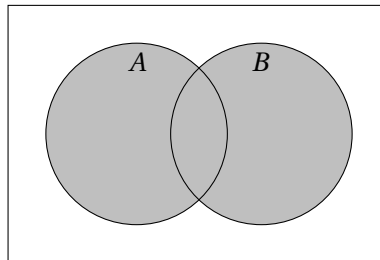
2.  $A = \{A, D, E, M\}$  et  $B = \{N, I, C, O\}$ .

.....  
 .....

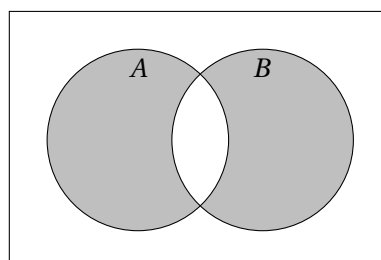
**B.2 - Union****Définition 8 : Union**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles, l'**union** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à .....

**Information :** La situation se représente ainsi :

**À retenir :**

- Le "ou" est inclusif, cela veut dire que l'on peut appartenir à  $A$  ou à  $B$  ou aux deux à la fois, c'est-à-dire appartenir à  $A \cup B$ .  
 Alors que dans la vie courante le "ou" est exclusif c'est-à-dire, qu'on peut appartenir à  $A$  ou appartenir à  $B$  mais pas les deux à la fois. Graphiquement :



*Le "ou" dans la vie courante*

- On retiendra que  $A \cup B = \dots\dots\dots$  est l'expression en compréhension de cet ensemble.

**Exemple :**

Soient  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{2, 3, 4\}$  alors  $A \cup B = \dots\dots\dots$

**✂ À savoir faire 3 : Union**

En reprenant les deux premières questions du **À savoir faire** précédent, donner l'union des ensembles considérés.

.....

.....

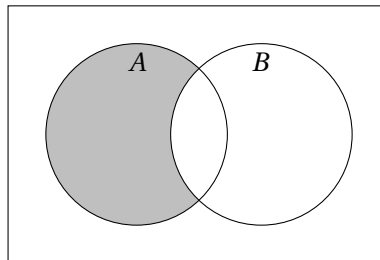
.....

.....

**B.3 - Différence****Définition 9 : Différence**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles, on appelle **différence** de  $A$  et  $B$ , que l'on notera  $A \setminus B$ , l'ensemble  $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ .

**Information :** La situation se représente ainsi :



**À retenir :** On peut aussi dire : " $A$  privé de  $B$ ", c'est-à-dire ce qu'il reste dans  $A$  quand on enlève les éléments de  $B$ .

**Exemple :**

- Si  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{2, 3, 4\}$  alors :  $A \setminus B = \dots\dots\dots$
- En gardant les mêmes ensembles  $A$  et  $B$  on a :  $B \setminus A = \dots\dots\dots$

On remarque alors que la différence n'est pas symétrique, tout comme pour la différence de deux nombres que vous connaissez depuis petit.

**✂ À savoir faire 4 : Différence**

1. Considérons deux ensembles  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{2, 3\}$ , déterminer leurs deux différences :

.....

.....

2. Considérons deux ensembles  $A = \{A, D, E, M\}$  et  $B = \{N, I, C, O\}$  déterminer  $A \setminus B$  :

.....

.....

### ✂ À savoir faire 5 : Mélange opérations ensembles

Soient  $E = \{O, R, A, N, G, E\}$  et  $V$  la partie de  $E$  contenant les voyelles.

1. Déterminer les éléments de  $V$  et de  $E \setminus V$ .

.....  
 .....

2. Soit  $A$  la partie de  $E$  qui contient des lettres du mot RAPIDE;

- (a) Déterminer les éléments de  $A$ ;

.....  
 .....

- (b) Peut-on écrire  $A \subset V$ ?

.....  
 .....

- (c) Déterminer  $A \cap V$

.....  
 .....

## C - Connecteurs logiques

### Définition 10 : Assertion

Une **assertion** est ..... pouvant être .....

#### Exemple :

- «  $1 > 0$  » est une assertion .....
- «  $3^2 = 6$  » est une assertion .....
- Pour  $A, B, C$  et  $D$  des points du plan : «  $(AB) > (CD)$  » n'est pas une assertion car il n'y a pas de relation d'ordre entre les droites du plan.

### Définition 11 : Connecteurs logiques

- L'assertion «  $P \wedge Q$  », que l'on lit : «  $P$  et  $Q$  » est vraie lorsque .....
- L'assertion «  $P \vee Q$  », que l'on lit : «  $P$  ou  $Q$  » est vraie lorsque .....  
 .....

**À retenir :** Le connecteur logique « ou » est inclusif en mathématiques, contrairement au sens du langage courant.

**Par exemple :** Dans un restaurant, si un menu affiche « fromage ou dessert », le client a choix entre soit du fromage soit un dessert, mais pas les deux à la fois. Dans le monde mathématiques, le « ou » étant inclusif, il accepte le choix « fromage et dessert ».

#### Exemple :

- L'assertion : «  $3 \leq 4$  » est l'assertion «  $(3 < 4) \vee (3 = 4)$  » comme l'une des deux assertions est vraie (ici ..... ) on a alors l'assertion de départ qui est .....
- Notons maintenant deux propositions  $P$  : «  $3 \leq 4$  » et  $Q$  : «  $4 > 5$  »;
  - L'assertion  $P$  est .....
  - L'assertion  $Q$  est .....

- L'assertion  $P \vee Q$  est .....
- L'assertion  $P \wedge Q$  est .....

### ✂ À savoir faire 6 : Déterminer la valeur de vérité d'une assertion mathématique

Déterminer la valeur de vérité de chaque des assertions suivantes

1. « Je vis sur Mars ou je fais actuellement des mathématiques » :

.....

2. « Je supporte l'Olympique Lyonnais et je respire » :

.....

3. « Je suis un chat ou je suis mortel » :

.....

## Partie II Les ensembles de nombres

### A - Entiers naturels

#### Définition 12 : Entier naturel

Un nombre **entier naturel** est .....

L'ensemble des nombres entiers naturels est noté ..... et on a :

$$\mathbb{N} = \dots\dots\dots$$

#### Information :

- Le  $\mathbb{N}$  vient de l'italien "*Naturale*" (naturel)
- Les "..." traduit le fait que l'ensemble des entiers naturels a une infinité d'éléments.

#### Exemple :

On a  $15 \dots \mathbb{N}$ ,  $10^3 \dots \mathbb{N}$  et  $\sqrt{4} \dots \mathbb{N}$  mais  $\dots \notin \mathbb{N}$

### B - Entiers relatifs

#### Définition 13 : Entier relatif

Un nombre **entier relatif** est .....

L'ensemble des nombres entiers naturels est noté ..... et on a :

$$\mathbb{Z} = \dots\dots\dots$$

#### Information :

- Le  $\mathbb{Z}$  vient de l'allemand "*Zahlen*" (nombre)
- On a clairement :  $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$

#### Exemple :

On a  $-2 \dots \mathbb{Z}$ ,  $5 \dots \mathbb{Z}$  et  $-\sqrt{49} \dots \mathbb{Z}$  mais  $\dots \notin \mathbb{Z}$

### ✂ À savoir faire 7 : Montrer qu'un nombre est un entier

Montrer que  $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{25}}{2} \in \mathbb{Z}$  :

.....

.....

.....

.....

.....

## C - Décimaux

### Définition 14 : Décimal

Un nombre **décimal** est ..... où  $a \in \dots\dots\dots$  et  $p \in \dots\dots\dots$ .

L'ensemble des nombres décimaux est noté ..... et on a :

$$\mathbb{D} = \dots\dots\dots$$

### ❗ Information :

- Le  $\mathbb{D}$  vient du français "*Décimale*"
- On peut alors affirmer que tout nombre décimale s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule, sa partie décimale est finie.
- On a  $\mathbb{Z} \dots\dots\dots \mathbb{D}$ .

### Exemple :

On a  $0,5 \dots\dots\dots \mathbb{D}$ ,  $\frac{3}{25} \dots\dots\dots \mathbb{D}$  mais  $\dots\dots\dots \notin \mathbb{D}$ .

### ✂ Erreur fréquente : Pour prouver qu'un nombre est décimale il faut utiliser la définition!

Pour prouver qu'un nombre est décimal on utilisera bien la définition. Par exemple pour affirmer que  $0,5 \in \mathbb{D}$ , il faut écrire  $0,5$  sous la forme  $\frac{a}{10^p}$  où  $a \in \mathbb{Z}$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

Dans ce cas :  $0,5 = \frac{5}{10}$  où  $a = 5 \in \mathbb{Z}$  et  $p = 1 \in \mathbb{N}$ .

### ✂ À savoir faire 8 : Montrer qu'un nombre est décimal

1. Montrer que  $0,8 \in \mathbb{D}$  :

.....

.....

.....

.....

2. Montrer que  $\frac{3}{25} \in \mathbb{D}$  :

.....

.....

.....

.....

3. Justifier que  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$  :

.....

.....

.....

.....

.....

Le nombre  $\frac{1}{3}$  n'est pas un nombre décimal, on note alors :  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

[illegible]

### Définition 15 : Rationnel

Un nombre **rationnel** .....  
L'ensemble des nombres rationnels est noté ..... et on a :

 = .....

- Le  $\mathbb{Q}$  vient de l'italien "*Quotiente*" (fraction)
- On a  $\mathbb{D} \dots \mathbb{Q}$ .
- On peut simplifier un peu l'écriture d'un rationnel en supposant uniquement que  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

On a  $\frac{1}{3} \dots \mathbb{Q}, 0 \dots \mathbb{Q}, -4, 8 \dots \mathbb{Q}$  mais  $\dots \notin \mathbb{Q}$ . (On prouvera ce dernier point, plus tard dans l'année.)

### ✂ À savoir faire 9 : Montrer qu'un nombre est rationnel

1. Montrer que  $0 \in \mathbb{Q}$  :

.....

.....

2. Montrer que  $-4,8 \in \mathbb{Q}$  :

.....

.....

3. Justifier que  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$  :

.....

.....

.....

.....

## E - Réels

### Définition 16 : Réel (intuitive)

Un nombre est **réel** .....

L'ensemble des nombres réels est donc l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

On notera l'ensemble des nombres réels .....

### i Information :

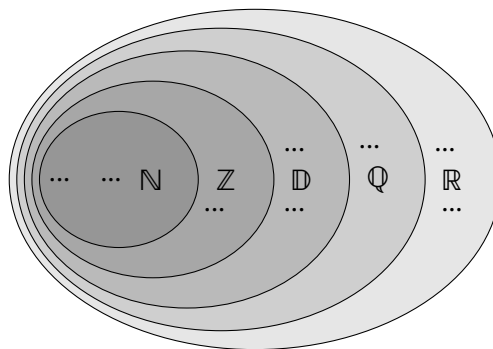
- Le  $\mathbb{R}$  vient de l'allemand "*Real*".
- On a  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

💡 **À retenir :** C'est l'ensemble contenant tous les nombres que vous connaissez.

### Exemple :

On a  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ,  $\pi \in \mathbb{R}$ ,  $-3,214536... \in \mathbb{R}$ . Ici nous n'avons pas d'exemple de nombre connu (pour nous) n'appartenant pas à l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

Pour conclure voici un ..... représentant les inclusions entre les différents ensemble de nombre :



### Définition 17 : Nature

La **nature** d'un nombre, c'est .....

**Exemple :**

La nature de  $\frac{4}{2}$  est ..... car en effet c'est un rationnel, et même un réel (comme tous les nombres) mais  $\frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{N}$ . Donc le premier ensemble auquel il appartient est  $\mathbb{N}$  qui est sa nature.

**✂ À savoir faire 10 : Déterminer la nature d'un nombre**

Compléter le tableau suivant, en mettant une croix dès lors que le nombre appartient à l'ensemble et entourer la croix donnant la nature du nombre :

|                      | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{R}$ |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $-\frac{5}{2}$       |              |              |              |              |              |
| $\frac{6}{2}$        |              |              |              |              |              |
| $\sqrt{121}$         |              |              |              |              |              |
| $4,5 \times 10^{-4}$ |              |              |              |              |              |
| $2\pi$               |              |              |              |              |              |
| $\sqrt{7}$           |              |              |              |              |              |
| $\frac{7}{9}$        |              |              |              |              |              |

**Partie III Inégalités et intervalles****A - Inégalités****Définition 18 : Ordre**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels, on dit que :

- $a$  est égal à  $b$ , et on note ....., si, et seulement si, .....
- $a$  est inférieur ou égal à  $b$ , et on note ....., si, et seulement si, .....
- $a$  est supérieur ou égal à  $b$ , et on note ....., si, et seulement si, .....

**i Information :**

- On obtient les cas d'**inférieur strictement** ( $<$ ) et **supérieur strictement** ( $>$ ) en remplaçant les inégalités larges ( $\leq$  et  $\geq$ ) par des inégalités strictes ( $<$  et  $>$ ).
- Cette définition est très importante et à retenir car elle donne la méthode pour établir une inégalité : il faut étudier le signe de la différence entre les deux membres !

**✂ À savoir faire 11 : Établir une inégalité**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que  $x^2 + 1 \geq 2x$  :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Définition 19 : Addition**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres réels. Si ..... alors .....

💡 **À retenir :** En d'autres termes, ajouter un même nombre à chaque membre d'une inégalité .....  
.....

**Information :**

- Bien entendu, si  $a = b$  alors  $a + c = b + c$ , et donc  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Nous avons équivalence dans cette propriété :

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

C'est-à-dire que si l'on sait que :  $a + c < b + c$  on peut alors affirmer que  $a < b$ .

**Propriété 2 : Opérations sur les inégalités**

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels, on a :

- **Somme membre à membre d'inégalités :** si  $a < b$  et  $c < d$  alors .....;
- **Multiplier une inégalité par un nombre strictement positif :** si  $a < b$  et  $c > 0$  alors .....;  
*Nous avons même une équivalence ici.*
- **Multiplier une inégalité par un nombre strictement négatif :** si  $a < b$  et  $c < 0$  alors .....;  
*Nous avons même une équivalence ici.*
- **Multiplier membre à membre deux inégalités de réels positifs :** si  $0 < a < b$  et  $0 < c < d$  alors .....

💡 **Information :** Bien entendu, le cas d'inégalité large ( $\leq$  ou  $\geq$ ) est vérifié à chaque fois étant donné que le cas d'égalité est vrai.

**Exemple :**

- Si  $x < 6$  et  $y < 4$  on a alors .....
- Si  $x < 2$  alors ..... et .....
- Si  $0 < x < y$ , comme  $0 < 3 < 5$ , on a alors : .....

**À retenir :**

- On peut ajouter membre à membre des inégalités et si l'une d'entre elles est stricte, alors l'inégalité obtenue l'est aussi;
- Multiplier une inégalité par un nombre strictement positif .....
- Multiplier une inégalité par un nombre strictement négatif .....
- On peut multiplier membre à membre des inégalités de réels **positifs**.

### Erreur fréquente : On ne peut pas soustraire des inégalités membres à membres

L'assertion :

$$\text{« Si } a < b \text{ et } c < d \text{ alors } a - c < b - d \text{ »}$$

est **FAUSSE**!

Voici un contre-exemple :  $4 < 5$  et  $-2 < 3$  alors  $4 - (-2) = 6$  et  $5 - 3 = 2$  pourtant on vient bien que  $4 - (-2) \not< 5 - 3$ . Petite explication, pour mieux sentir le soucis : soustraire membre à membre deux inégalités revient d'abord à multiplier par  $-1$  une inégalité, c'est-à-dire passer de  $-2 < 3$  à  $2 > -3$  (on change alors le sens de l'inégalité) puis à ajouter les deux inégalités. Et le problème intervient lorsque l'on cherche à ajouter les nouvelles inégalités car on a alors une condition importante de la propriété : **les deux inégalités doivent avoir le même sens d'inégalité**.

### À savoir faire 12 : Manipuler les inégalités

1. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \leq 1$  et  $y \leq 2$ , on a  $4x + 3y \leq 10$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

2. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \geq 4$  et  $y \geq 1$ , on a  $3 + xy \geq 7$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

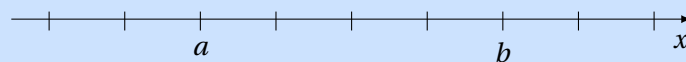
## B - Intervalles

### Définition 20 : Intervalle fermé

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a \leq b$ . On appelle **intervalle fermé**, que l'on notera  $[a, b]$  l'ensemble des réels  $x$  tels que :  $a \leq x \leq b$ . On a alors :

$$[a, b] = \dots\dots\dots$$

On représentera cet intervalle fermé de la façon suivante :

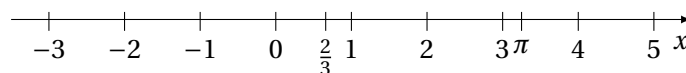


### Exemple :

L'intervalle fermé  $[-1, 3]$  est l'ensemble des nombres réels compris entre  $-1$  et  $3$  au sens large, c'est-à-dire :

$$[-1, 3] = \dots\dots\dots$$

Graphiquement on a :



On a alors  $0 \dots\dots [-1, 3]$ ,  $\frac{2}{3} \dots\dots [-1, 3]$  mais  $\pi \dots\dots [-1, 3]$

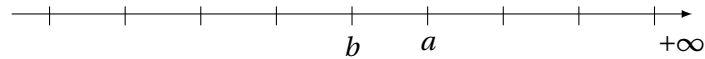
**Information :** Que se passe-t-il lorsque  $a = b$ 

L'intervalle  $[a, b] = \dots\dots\dots$ , devient un  $\dots\dots\dots$

**Attention :** Que se passe-t-il lorsque  $a > b$ 

L'intervalle  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} = \emptyset$ , devient vide car il n'existe aucun  $x \geq a$  et  $x \leq b$  car  $a > b$ .

Graphiquement il faut être dans l'intervalle bleu et dans l'intervalle rouge :



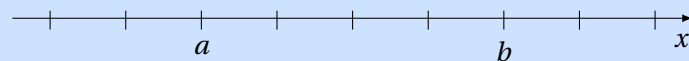
On retiendra bien qu'un intervalle du type  $[2, 1]$  n'existe pas !

**Définition 21 : Intervalle ouvert**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . On appelle **intervalle ouvert**, que l'on notera  $]a, b[$  l'ensemble des réels  $x$  tels que :  $a < x < b$ . On a alors :

$$]a, b[ = \dots\dots\dots$$

On représentera cet intervalle ouvert de la façon suivante :



**À retenir :** La différence entre l'intervalle fermé et l'intervalle ouvert ? La seule différence entre l'intervalle fermé  $[a, b]$  et l'intervalle  $]a, b[$  est l'inclusion ou non des bornes. Dans le premier les bornes sont comprises dans l'ensemble de nombre considéré, dans le second les bornes ne le sont pas. Concrètement nous avons :

$$]a, b[ = [a, b] \setminus \{a, b\}$$

L'intervalle ouvert c'est l'intervalle fermé auquel on a retiré les deux bornes.

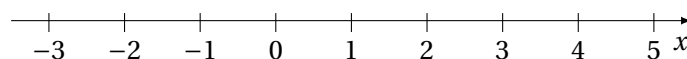
On impose que  $a < b$ , car si  $a = b$  on a alors  $]a, b[ = ]a, a[ = \emptyset$ , de la même manière que précédemment si  $a > b$  l'intervalle ouvert est alors vide.

**Exemple :**

L'intervalle ouvert  $] -1, 3[$  est l'ensemble des nombres réels compris entre -1 et 3 au sens large, c'est-à-dire :

$$]-1, 3[ = \dots\dots\dots$$

Graphiquement on a :



On a  $-1 \dots\dots ] -1, 3[$  et  $3 \dots\dots ] -1, 3[$

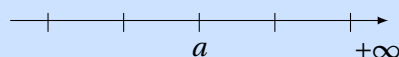
**Définition 22 : Intervalles non bornés**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,

- L'intervalle  $[a, +\infty[$  est l'ensemble des nombres  $x$  tels que  $x \geq a$ . On a alors :

$$[a, +\infty[ = \dots\dots\dots$$

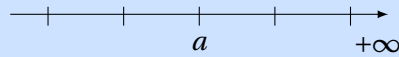
Graphiquement on a :



- L'intervalle  $]a, +\infty[$  est l'ensemble des nombres  $x$  tels que  $x > a$ . On a alors :

$$]a, +\infty[ = \dots\dots\dots$$

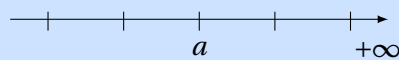
Graphiquement on a :



- L'intervalle  $] -\infty, a]$  est l'ensemble des nombres  $x$  tels que  $x \leq a$ . On a alors :

$$]-\infty, a] = \dots\dots\dots$$

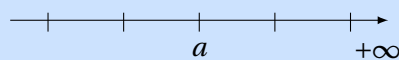
Graphiquement on a :



- L'intervalle  $] -\infty, a[$  est l'ensemble des nombres  $x$  tels que  $x > a$ . On a alors :

$$]-\infty, a[ = \dots\dots\dots$$

Graphiquement on a :



**Information :** Crochet ouvert en  $\pm\infty$

$+\infty$  se lit "+ infini" et  $-\infty$  se lit "- infini", ce ne sont pas des nombres. Il est impossible de les atteindre, donc par définition nous mettrons toujours des crochets ouverts en  $\pm\infty$ .

**À savoir faire 13 : Manipuler représentation, inégalité d'un intervalle.**

Compléter le tableau suivant :

| Représentation | Inégalité        | Intervalle      |
|----------------|------------------|-----------------|
|                | ...              | ...             |
|                | $-9 \leq x < -7$ | ...             |
|                | ...              | $] -1, 1]$      |
|                | $x > 11$         | ...             |
|                | ...              | $] -\infty, 2[$ |

**À retenir : Cas particulier**

- $] -\infty, +\infty[ = \dots\dots\dots$
- $] -\infty, 0] = \dots\dots\dots$
- $[0, +\infty[ = \dots\dots\dots$
- $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \dots\dots\dots$

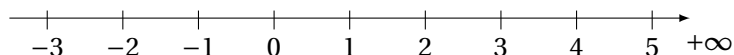
## C - Union et intersection d'intervalles

Voyons sur plusieurs exemples comment déterminer l'union et l'intersection de deux intervalles.

### Exemple :

Soit  $I_1 = ]-\infty, 1]$  et  $I_2 = ]-1, 3]$ .

Pour déterminer l'union et l'intersection de  $A$  et  $B$  on peut penser à représenter ces deux intervalles sur une droite graduée.



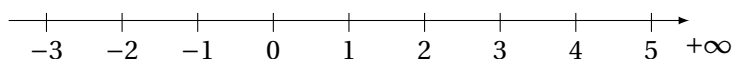
Pour obtenir :

- L'intersection  $I_1 \cap I_2$  :
  - Nous allons d'abord chercher la zone présente dans les deux intervalles représentés, ici c'est la zone entre -1 et 1.
  - Par la suite nous faisons l'étude des bornes pour connaître le sens des crochets.
    - En -1, comme  $-1 \notin I_2$  car c'est un crochet ouvert, on a alors :  $-1 \dots I_1 \cap I_2$  (car il faut être dans les deux pour être dans l'intersection!) ainsi nous avons un crochet ouvert en -1

.... -1, 1

- En 1, comme  $1 \in I_1$  et  $1 \in I_2$  on a alors :  $1 \dots I_1 \cap I_2$  ainsi nous avons un crochet fermé en 1

$$I_1 \cap I_2 = \dots\dots\dots$$

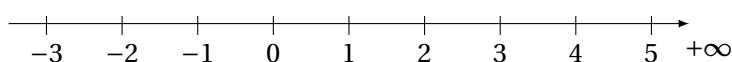


- L'union  $I_1 \cup I_2$  :
  - Nous allons d'abord chercher la zone recouvrant  $I_1$  ou  $I_2$ , ici c'est la zone entre  $-\infty$  et 3.
  - Par la suite nous faisons l'étude des bornes pour connaître le sens des crochets.
    - En  $-\infty$ , par définition crochet ouvert

.....  $-\infty, 3$

- En 3, comme  $3 \in I_2$  on a alors :  $3 \dots I_1 \cup I_2$  (car pour être dans l'union il suffit d'être dans au moins l'un des deux) ainsi nous avons un crochet fermé en 3

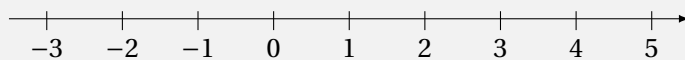
$$I_1 \cup I_2 = \dots\dots\dots$$



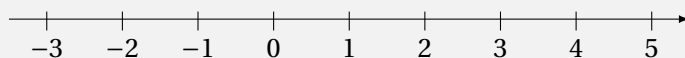
**✂ À savoir faire 14 : Déterminer l'union et l'intersection de deux intervalles**

Représenter et déterminer l'union et l'intersection de chacun des couples d'intervalles suivant :

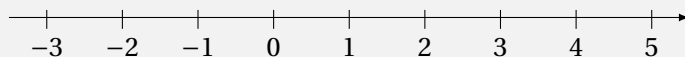
1. Pour  $I_1 = ]-1, 2]$  et  $I_2 = ]0, 3[$



2. Pour  $I_1 = [-1, 1[$  et  $I_2 = ]2, 3[$



3. Pour  $I_1 = ]-\infty, 2]$  et  $I_2 = ]2, +\infty[$



## Partie IV Exercices

### A - Ensembles de nombres

★★★☆☆ EXERCICE 1 (Nature) ..... ①

Déterminer la nature de chacun des nombres suivants :

1.  $\frac{81}{4}$

4.  $-\frac{9}{60}$

7.  $\frac{\pi}{4}$

10.  $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)$

2.  $\frac{15}{5}$

5.  $-\frac{5}{4}$

8.  $\frac{5\pi}{4\pi}$

11.  $5 \times 10^{-3}$

3.  $-\frac{1}{3}$

6.  $5 \times 10^4$

9.  $\sqrt{0,81}$

12.  $\frac{2}{10^{-2}}$

★★★☆☆ EXERCICE 2 (Tableau) ..... ②

Compléter le tableau ci-dessous, dans lequel une croix signifie que le nombre appartient à l'ensemble correspondant. On entourera la croix donnant la nature de chaque nombre.

|                    | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{R}$ |
|--------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 7                  |              |              |              |              |              |
| $-\frac{28}{4}$    |              |              |              |              |              |
| $9 \times 10^{-4}$ |              |              |              |              |              |
| $\frac{\pi}{4}$    |              |              |              |              |              |
| $\sqrt{400}$       |              |              |              |              |              |
| $\frac{5}{6}$      |              |              |              |              |              |

### B - Manipulations d'égalités et d'inégalités

★★★☆☆ EXERCICE 3 (Égalité) ..... ③

1. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ , montrer que :  $\frac{3x^2 + 16x + 8}{x^2 + x - 2} = \frac{5x + 4}{x - 1} - \frac{2x}{x + 2}$ .

2. Soient  $R$  et  $S \in \mathbb{R}_+^*$ , montrer que  $\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{S}} = \frac{RS}{R + S}$

★★★☆☆ EXERCICE 4 (Inégalités) ..... ④

1. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \geq 3$  et  $y \geq 1$ , on a  $4x + 2y \geq 14$

2. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \leq 10$  et  $y \geq 1$ , on a  $2x - 4y \leq 16$

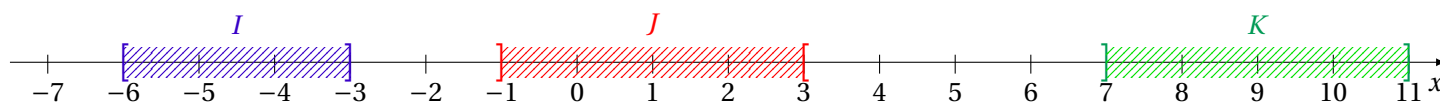
3. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \leq 1$  et  $y \leq 1$ , on a  $\frac{3}{2}x + \frac{y}{2} \leq 2$

4. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x < 6$  et  $y > -10$ , on a  $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} < 4$
5. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x < 2$  et  $y < -2$ , on a  $-3x - 2y > -2$
6. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $0 \leq x \leq 1$  et  $-1 \leq y \leq 0$ , on a  $-2 \leq 4x + 2y \leq 4$
7. Considérons  $x$  et  $y$  deux nombres réels vérifiant :  $-1 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$
- (a) Démontrer que :  $-\frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{3}{4}$
- (b) Démontrer que :  $-\frac{3}{2} \leq x - y \leq 1$

### C - Intervalles

#### ★★★☆☆ EXERCICE 5 (Représentations) ..... (✓)

On a représenté trois intervalles  $I, J$  et  $K$  sur la droite graduée ci-dessous :



Compléter les équivalences suivantes :

1.  $x \in I \Leftrightarrow x \in \dots \Leftrightarrow \dots \leq x \leq \dots$       2.  $x \in J \Leftrightarrow x \in \dots \Leftrightarrow \dots x \dots$       3.  $x \in K \Leftrightarrow x \in \dots \Leftrightarrow \dots x \dots$

#### ★★★☆☆ EXERCICE 6 (Tableau) ..... (✓)

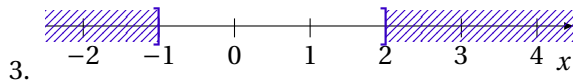
Compléter le tableau suivant, à l'aide d'un intervalle, d'une inégalité ou d'une représentation :

| Représentation | Inégalité       | Intervalle     |
|----------------|-----------------|----------------|
|                | ...             | ...            |
|                | $-3 < x \leq 0$ | ...            |
|                | ...             | $[-4, 2[$      |
|                | $x < 3$         | ...            |
|                | ...             | $]9, +\infty[$ |

#### ★★★☆☆ EXERCICE 7 (Représentations #2) ..... (✓)

Dans chaque cas déterminer avec un ou des intervalles l'ensemble représenté :

- 1.
- 2.



★★★☆☆ EXERCICE 8 (Appartenance) ..... ⌚

Recopier et compléter par  $\in$  ou  $\notin$

- |                                  |                         |                                  |                                          |
|----------------------------------|-------------------------|----------------------------------|------------------------------------------|
| 1. $-2,5 \dots [-3, 5]$          | 3. $-7 \dots ] -6, -3[$ | 5. $0 \dots ]0, +\infty[$        | 7. $1,3 \dots [-5, 0[ \cup ]2, +\infty[$ |
| 2. $\frac{\pi}{2} \dots [-3, 3[$ | 4. $1 \dots [1, 6[$     | 6. $10^{-1} \dots ] -\infty, 0]$ | 8. $-4 \dots [-3, +\infty[$              |

★★★☆☆ EXERCICE 9 (Union/ Intersection) ..... ⌚

Considérons les intervalles  $I = [-2, 4]$ ,  $J = [-5, 2[$  et  $K = ] -3, 5[$  Déterminer et représenter sur une droite graduée :

- |                   |                   |                   |                          |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------------|
| 1. $L = I \cap J$ | 2. $M = I \cup J$ | 3. $N = K \cap I$ | 4. $P = I \cap J \cap K$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------------|

★★★☆☆ EXERCICE 10 (Union/ Intersection #2) ..... ⌚

Dans chacun des cas, représenter les intervalles donnés  $I$  et  $J$  sur une droite graduée, puis exprimer sous forme d'intervalles  $I \cap J$  et  $I \cup J$ .

- |                                               |                                                |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. $I = [-4, 2]$ et $J = [-1, 6]$             | 3. $I = ] -\infty, 7]$ et $J = ] -\infty, 4]$  |
| 2. $I = ] -\infty, 3]$ et $J = [-2, +\infty[$ | 4. $I = ] -\infty, -1]$ et $J = [-1, +\infty[$ |

## VRAI OU FAUX ?



a)  $\sqrt{256} \in \mathbb{N}$

☐ ☐

b) 0,03 est un nombre rationnel

☐ ☐

c) Si  $x \in \mathbb{Z}$  alors  $x^2 \in \mathbb{Z}$

☐ ☐

d) Si  $x = -\sqrt{2}$  et  $y = 2$  alors  $3x^2 - 4y \in \mathbb{N}$

☐ ☐

e) Si  $x \in \mathbb{D}^*$  alors l'inverse de  $x$  est décimal

☐ ☐

f) Si  $x = \frac{3}{2}$  alors  $\frac{-2x}{x+1} \in \mathbb{Z}$

☐ ☐

g) Le carré d'un nombre irrationnel n'est jamais rationnel

☐ ☐



h) Le quotient de deux nombres décimaux non nuls est un nombre décimal

☐ ☐

i) L'inverse d'un nombre décimal non nul n'est jamais un nombre entier

☐ ☐

j) Si  $x \in \mathbb{D}$  et  $n \in \mathbb{Z}^*$  alors  $\frac{x}{n} \in \mathbb{D}$

☐ ☐

k)  $-1 \in [-5; -2]$

☐ ☐

l)  $0 \in ]0; -2]$

☐ ☐

m)  $-1 \notin ]-1, 3]$

☐ ☐

n)  $] -\infty, 2[ \cup [2, +\infty[ = \mathbb{R}$

☐ ☐

o)  $[1, 5[ \cap ]5, 8[ = \{8\}$

☐ ☐

p)  $] -\infty, 4[ \cap ]4, +\infty[ = \emptyset$

☐ ☐

q)  $[2, 6[ \cap ]6, 9] = \{6\}$

☐ ☐