

---

# Les ensembles de nombres

---

## Plan du chapitre

---

<b>I Les ensembles</b> .....	<b>2</b>
A - Définitions.....	2
B - Opérations sur les ensembles.....	4
C - Connecteurs logiques.....	7
<b>II Les ensembles de nombres</b> .....	<b>8</b>
A - Entiers naturels.....	8
B - Entiers relatifs.....	8
C - Décimaux.....	9
D - Rationnels.....	10
E - Réels.....	11
<b>III Inégalités et intervalles</b> .....	<b>12</b>
A - Inégalités.....	12
B - Intervalles.....	14
C - Union et intersection d'intervalles.....	17
<b>IV Exercices</b> .....	<b>19</b>
A - Ensembles de nombres.....	19
B - Manipulation d'inégalités.....	19
C - Intervalles.....	20

---

## Introduction

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à décrire les ensembles de nombres notamment à l'aide d'intervalles, et à effectuer des opérations sur ces ensembles. Ces outils serviront particulièrement pour l'étude des fonctions et des inéquations.

## Partie I Les ensembles

### A - Définitions

#### Définition 1 : Ensemble

Un **ensemble** est une collection (éventuellement infinie) d'objets satisfaisant (ou non) un certain nombre de propriétés

**i Information :** Cette définition n'est pas rigoureuse mais elle nous suffira pour l'année de seconde.

#### Définition 2 : Élément

On appelle **élément** d'un ensemble, un objet qui appartient à cette ensemble.

#### Exemple :

Voici quelques exemples d'ensemble :

- L'ensemble des jours de la semaine que l'on peut noter  $S$  est :

$$S = \{\text{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche}\}$$

- L'ensemble des fournitures dans votre trousse :

$$F = \{\text{stylo, crayon, gomme, règle}\}$$

- L'ensemble des nombres entiers positifs, nous le verrons dans la prochaine partie qu'il se note  $\mathbb{N}$  :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Voici un exemple d'ensemble contenant un nombre infini d'éléments.

- Un ensemble  $H$  dont les éléments sont différents et n'ont pas de relation particulière entre eux :

$$H = \{\text{pomme, voiture, 7, rouge}\}$$

- L'ensemble  $V$  des nombres réels  $x$  tel que :  $x + 1 = x$ ...

Il n'en existe aucun, en effet  $x + 1 = x \Leftrightarrow 1 = 0$  et cette dernière égalité est fautive donc la première également. On notera alors :

$$V = \emptyset$$

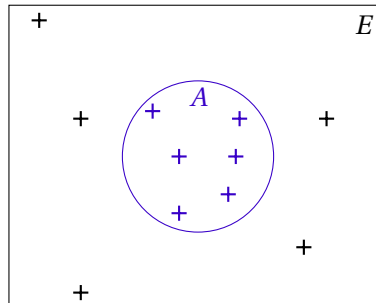
$\emptyset$  est l'ensemble ne contenant aucun élément, on l'appelle l'**ensemble vide**.

- Donner l'ensemble des chiffres : .....

**Définition 3 : Sous-ensemble**

Un ensemble  $A$  est un **sous-ensemble** d'un ensemble  $E$  lorsque tous les éléments de  $A$  appartiennent à l'ensemble  $E$ . On dira que  $A$  est inclus dans  $E$  ou que  $A$  est une partie de  $E$ .

**Information :** Graphiquement la situation se représente ainsi :



On pourra écrire que  $A \subset E$

**Exemple :**

L'ensemble des jours du week-end  $W = \{\text{samedi, dimanche}\}$  est un sous-ensemble de l'ensemble des jours de la semaine  $S$  que l'on a défini précédemment. On a  $W \subset S$ .

**Erreur fréquente :** Ne pas confondre  $\subset$  et  $\in$

Si  $A$  est un sous-ensemble de  $E$  on écrira jamais :  ~~$A \in E$~~ , en effet le symbole d'appartenance est uniquement entre un élément et un ensemble. Alors que le symbole d'inclusion est entre deux ensembles.

**Définition 4 : Singleton**

L'ensemble  $E$  est appelé **singleton**, si  $E$  est constitué d'un unique élément.

**Exemple :**

- L'ensemble de ma matière préférée est le singleton :  $\{\text{mathématiques}\}$ ;
- L'ensemble  $E$  contenant uniquement  $x$  est :  $E = \{x\}$ .

**Information :** C'est généralement le type d'ensemble que vous avez obtenu lorsque vous avez résolu des équations jusqu'ici :

$$\begin{aligned}x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation  $x + 1 = 0$  est le singleton :  $S = \{-1\}$ .

**Erreur fréquente :** Ne pas confondre l'élément  $x$  et le singleton  $\{x\}$

Les deux objets sont fondamentalement différents : l'un est élément (un objet) l'autre un ensemble (une boîte). Ça ne vous viendrait pas à l'esprit de confondre une paire de lunettes (élément) et son étui à lunettes (ensemble).

Nous avons deux grandes manières de définir un ensemble :

**Définition 5 : Ensemble en extension**

On dit qu'un ensemble est en **extension** quand on énumère la liste de ses éléments.

**Information :** C'est la façon la plus classique, c'est la manière que l'on a utilisé jusqu'ici pour définir nos ensembles.

**Exemple :**

- Quand un professeur fait l'appel en début d'heure, il passe en revue l'ensemble des élèves de la classe, qui est, par définition, en extension.
- L'ensemble  $A = \{1, 0, 4, -7\}$  est un ensemble en extension.

**Définition 6 : Ensemble en compréhension**

On dit qu'un ensemble est en **compréhension** si on le définit par la donnée d'une propriété (condition) caractéristique (à l'ensemble) que doivent vérifier les éléments.

On écrit alors :  $E = \{x / \text{condition}(x)\}$  où  $x$  est un élément de l'ensemble et "condition( $x$ )" est une propriété mathématique. On lira : "l'ensemble des  $x$  tel que condition( $x$ )".

**Exemple :**

$S = \{x / x + 1 = 0\}$  est l'ensemble en compréhension du singleton :  $S = \{-1\}$

**✂ À savoir faire 1 : Ensemble en extension, en compréhension**

1. Donner une expression en extension de l'ensemble en compréhension suivant :

$\{x/x \text{ est un nombre entier, } x < 20, \text{ et } x \text{ est pair}\}$

.....  
 .....

2. Donner une expression en extension de l'ensemble en compréhension suivant :

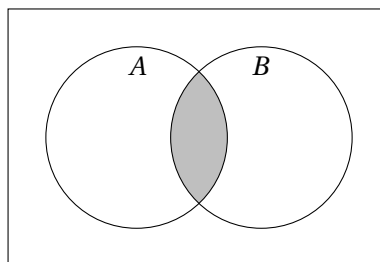
$\{(a, b)/a, b \text{ sont des nombres entiers et } a < b < 3\}$

.....  
 .....

**B - Opérations sur les ensembles****B.1 - Intersection****Définition 7 : Intersection**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles, l'**intersection** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments  $x$  tels que  $x$  appartient à  $A$  et  $x$  appartient à  $B$ . On notera cet ensemble :  $A \cap B$

**i Information :** La situation se représente ainsi :

**💡 À retenir :**

- On retiendra que  $A \cap B = \{x/ x \in A \text{ et } x \in B\}$  est l'expression en compréhension de cet ensemble.

- L'intersection de deux ensembles peut être vide, ce qui signifie qu'il n'y a aucun élément commun entre les deux ensembles considérés.

**Exemple :**

Soient  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{2, 3, 4\}$  alors  $A \cap B = \{2, 3\}$

**✂ À savoir faire 2 : Intersection**

1. Considérons deux ensembles  $A = \{A, L, I, C, E\}$  et  $B = \{B, E, N\}$ , déterminer l'intersection de ces deux ensembles :

.....  
 .....

2. Considérons deux ensembles  $A = \{A, D, E, M\}$  et  $B = \{N, I, C, O\}$

.....  
 .....

3. Soient  $(d)$  et  $(d')$  deux droites du plan, sécantes en un point  $A$ .  
 Déterminer  $(d) \cap (d')$ .

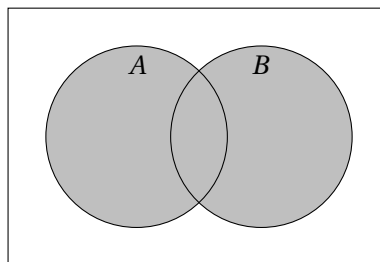
.....  
 .....

**B.2 - Union**

**Définition 8 : Union**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles, l'**union** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments  $x$  tels que  $x$  appartient à  $A$  ou  $x$  appartient à  $B$ .

**Information :** La situation se représente ainsi :

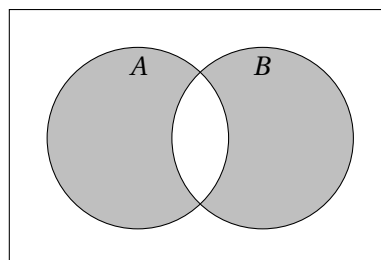


**À retenir :**

- Le "ou" est inclusif, cela veut dire que l'on peut avoir les deux à la fois ( $A \cap B$ ) et non pas uniquement les éléments stricts à  $A$  et  $B$ .

Dans la vie courante, le "ou" est exclusif c'est-à-dire que c'est l'un ou l'autre mais pas les deux.

Graphiquement :



En mathématiques, on accepte d'avoir les deux simultanément, on rajoute donc  $A \cap B$ .

- On retiendra que  $A \cup B = \{x/ x \in A \text{ ou } x \in B\}$  est l'expression en compréhension de cet ensemble.

**Exemple :**

Soient  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{2, 3, 4\}$  alors  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

**✂ À savoir faire 3 : Union**

En reprenant les deux premières questions du **À savoir faire** précédent, donner l'union des ensembles considérés.

.....

.....

.....

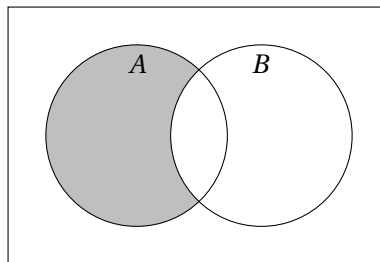
.....

**B.3 - Différence**

**Définition 9 : Différence**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles, on appelle **différence** de  $A$  et  $B$ , que l'on notera  $A \setminus B$  l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas dans  $B$ .

**i Information :** La situation se représente ainsi :



**💡 À retenir :** On peut aussi dire : " $A$  privé de  $B$ ", c'est-à-dire ce qu'il reste dans  $A$  quand on enlève les éléments de  $B$ .

**Exemple :**

- Si  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{2, 3, 4\}$  alors :  $A \setminus B = \{1\}$
- En gardant les mêmes ensembles  $A$  et  $B$  on a :  $B \setminus A = \{4\}$

On remarque alors que la différence n'est pas symétrique, tout comme pour la différence de deux nombres que vous connaissez depuis petit.

**✂ À savoir faire 4 : Différence**

1. Considérons deux ensembles  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{2, 3\}$ , déterminer leurs deux différences :

.....

.....

2. Considérons deux ensembles  $A = \{A, D, E, M\}$  et  $B = \{N, I, C, O\}$  déterminer  $A \setminus B$  :

.....

.....

**✂ À savoir faire 5 : Mélange opérations ensembles**

Soient  $E = \{O, R, A, N, G, E\}$  et  $V$  la partie de  $E$  contenant les voyelles.

1. Déterminer les éléments de  $V$  et de  $E \setminus V$ .

.....  
 .....

2. Soit  $A$  la partie de  $E$  qui contient des lettres du mot RAPIDE;

(a) Déterminer les éléments de  $A$ ;

.....  
 .....

(b) Peut-on écrire  $A \subset V$ ?

.....  
 .....

(c) Déterminer  $A \cap V$

.....  
 .....

**C - Connecteurs logiques**

**Définition 10 : Assertion**

Une **assertion** est un énoncé (une phrase) mathématique pouvant être vrai ou faux.

**Exemple :**

- «  $1 > 0$  » est une assertion vraie.
- «  $3^2 = 6$  » est une assertion fausse.
- Pour  $A, B, C$  et  $D$  des points du plan : «  $(AB) > (CD)$  » n'est pas une assertion car il n'y a pas de relation d'ordre entre les droites du plan.

**Définition 11 : Connecteurs logiques**

- L'assertion «  $P \wedge Q$  », que l'on lit : «  $P$  et  $Q$  » est vraie lorsque  $P$  et  $Q$  sont simultanément vraies.
- L'assertion «  $P \vee Q$  », que l'on lit : «  $P$  ou  $Q$  » est vraie lorsque  $P$  est vraie ou quand  $Q$  est vraie ou quand les deux assertions sont simultanément vraies.

**⚡ À retenir :** Le connecteur logique « ou » est inclusif en mathématiques, contrairement au sens du langage courant.

Par exemple : Dans un restaurant, si un menu affiche « fromage ou dessert », le client a choix entre soit du fromage soit un dessert, mais pas les deux à la fois. Dans le monde mathématiques, le « ou » étant inclusif, il accepte le choix « fromage et dessert ».

**Exemple :**

- L'assertion : «  $3 \leq 4$  » est l'assertion «  $(3 < 4) \vee (3 = 4)$  » comme l'une des deux assertions est vraie (ici  $3 < 4$ ) on a alors l'assertion de départ qui est vraie.
- Notons maintenant deux propositions  $P$  : «  $3 \leq 4$  » et  $Q$  : «  $4 > 5$  »;
  - L'assertion  $P$  est .....
  - L'assertion  $Q$  est .....

- L'assertion  $P \vee Q$  est .....
- L'assertion  $P \wedge Q$  est .....

### ✂ À savoir faire 6 : Déterminer la valeur de vérité d'une assertion mathématique

Déterminer la valeur de vérité de chaque des assertions suivantes

1. « Je vis sur Mars ou je fais actuellement des mathématiques » :

.....

2. « Je supporte l'Olympique Lyonnais et je respire » :

.....

3. « Je suis un chat ou je suis mortel » :

.....

## Partie II Les ensembles de nombres

### A - Entiers naturels

#### Définition 12 : Entier naturel

Un nombre **entier naturel** est un nombre entier qui est positif. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté  $\mathbb{N}$  et on a :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

#### **i** Information :

- Le  $\mathbb{N}$  vient de l'italien "*Naturale*" (naturel)
- Les "..." traduit le fait que l'ensemble des entiers naturels a une infinité d'éléments.

#### Exemple :

On a  $15 \in \mathbb{N}$ ,  $10^3 \in \mathbb{N}$  et  $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$  mais  $-2 \notin \mathbb{N}$

### B - Entiers relatifs

#### Définition 13 : Entier relatif

Un nombre **entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté  $\mathbb{Z}$  et on a :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

#### **i** Information :

- Le  $\mathbb{Z}$  vient de l'allemand "*Zahlen*" (nombre)
- On a clairement :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- On dira plus simplement qu'un entier relatif est un entier.

#### Exemple :

On a  $-2 \in \mathbb{Z}$ ,  $5 \in \mathbb{Z}$  et  $-\sqrt{49} \in \mathbb{Z}$  mais  $-0,5 \notin \mathbb{Z}$

**✂ À savoir faire 7 : Montrer qu'un nombre est un entier**

Montrer que  $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{25}}{2} \in \mathbb{Z}$  :

.....

.....

.....

.....

.....

**C - Décimaux**

**Définition 14 : Décimal**

Un nombre **décimal** est un nombre pouvant s'écrire sous la forme  $\frac{a}{10^p}$  où  $a$  est un entier et  $p$  un entier naturel. L'ensemble des nombres décimaux est noté  $\mathbb{D}$  et on a :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^p} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{N} \right\}$$

**i Information :**

- Le  $\mathbb{D}$  vient du français "Décimale"
- On peut alors affirmer que tout nombre décimale s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule, sa partie décimale est finie.
- On a  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ .

**Exemple :**

On a  $0,5 \in \mathbb{D}$ ,  $\frac{3}{25} \in \mathbb{D}$  mais  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ .

**\* Erreur fréquente : Pour prouver qu'un nombre est décimale il faut utiliser la définition!**

Pour prouver qu'un nombre est décimal on utilisera bien la définition. Par exemple pour affirmer que  $0,5 \in \mathbb{D}$ , il faut écrire  $0,5$  sous la forme  $\frac{a}{10^p}$  où  $a \in \mathbb{Z}$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

Dans ce cas :  $0,5 = \frac{5}{10}$  où  $a = 5 \in \mathbb{Z}$  et  $p = 1 \in \mathbb{N}$ .

**✂ À savoir faire 8 : Montrer qu'un nombre est décimal**

1. Montrer que  $0,8 \in \mathbb{D}$  :

.....

.....

.....

.....

2. Montrer que  $\frac{3}{25} \in \mathbb{D}$  :

.....

.....

.....

.....

3. Justifier que  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$  :

.....



**✂ À savoir faire 9 : Montrer qu'un nombre est rationnel**

1. Montrer que  $0 \in \mathbb{Q}$  :

.....  
 .....

2. Montrer que  $-4,8 \in \mathbb{Q}$  :

.....  
 .....

3. Justifier que  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$  :

.....  
 .....  
 .....

**E - Réels**

**Définition 16 : Réel (intuitive)**

Un nombre est **réel** s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée droite réelle. L'ensemble des nombres réels est donc l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée. On notera l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

**i Information :**

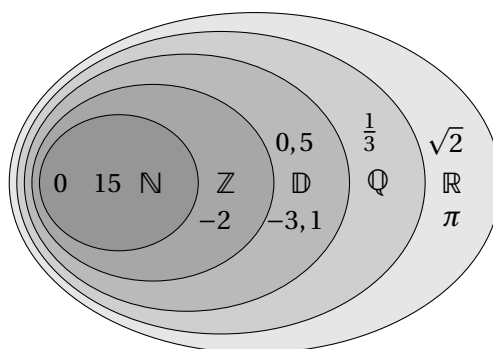
- Le  $\mathbb{R}$  vient de l'allemand "Real".
- On a  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**💡 À retenir :** C'est l'ensemble contenant tous les nombres que vous connaissez.

**Exemple :**

On a  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \pi \in \mathbb{R}, -3,214536... \in \mathbb{R}$ . Ici nous n'avons pas d'exemple de nombre connu (pour nous) n'appartenant pas à l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

Pour conclure voici un **diagramme de Venn** représentant les inclusions entre les différents ensemble de nombre :



**Définition 17 : Nature**

La **nature** d'un nombre, c'est le premier ensemble auquel il appartient.

**Exemple :**

La nature de  $\frac{4}{2}$  est  $\mathbb{N}$  car en effet c'est un rationnel, et même un réel (comme tous les nombres) mais  $\frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{N}$ . Donc le premier ensemble auquel il appartient est  $\mathbb{N}$  qui est sa nature.

**✂ À savoir faire 10 : Déterminer la nature d'un nombre**

Compléter le tableau suivant, en mettant une croix dès lors que le nombre appartient à l'ensemble et entourer la croix donnant la nature du nombre :

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-\frac{5}{2}$					
$-\frac{6}{2}$					
$\sqrt{121}$					
$\sqrt{7}$					
$2\pi$					
$4,5 \times 10^{-4}$					
$\frac{7}{9}$					

**Partie III Inégalités et intervalles****A - Inégalités****Définition 18 : Ordre**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels, on dit que :

- $a$  est inférieur ou égal à  $b$ , et on note  $a \leq b$ , si, et seulement si,  $a - b \leq 0$
- $a$  est supérieur ou égal à  $b$ , et on note  $a \geq b$ , si, et seulement si,  $a - b \geq 0$

**i Information :**

- On obtient les cas d'**inférieur strictement** ( $<$ ) et **supérieur strictement** ( $>$ ) en remplaçant les inégalités larges ( $\leq$  et  $\geq$ ) par des inégalités strictes ( $<$  et  $>$ ).
- Cette définition est très importante et à retenir car elle donne la méthode pour établir une inégalité : il faut étudier le signe de la différence entre les deux membres !

**✂ À savoir faire 11 : Établir une inégalité**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que  $x^2 + 1 \geq 2x$  :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Définition 19 : Addition**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres réels,

Si  $a < b$  alors  $a + c < b + c$ .

En d'autres termes, ajouter un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

**Information :**

- Bien entendu, si  $a = b$  alors  $a + c = b + c$ , et donc  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Nous avons équivalence dans cette propriété :

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

C'est-à-dire que si l'on sait que :  $a + c < b + c$  on peut alors affirmer que  $a < b$ .

**Propriété 2 : Opérations sur les inégalités**

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels, on a :

- **Somme membre à membre d'inégalités** : si  $a < b$  et  $c < d$  alors  $a + c < b + d$ ;
- **Multiplier une inégalité par un nombre strictement positif** : si  $a < b$  et  $c > 0$  alors  $ac < bc$   
*Nous avons même une équivalence ici.*
- **Multiplier une inégalité par un nombre strictement négatif** : si  $a < b$  et  $c < 0$  alors  $ac > bc$   
*Nous avons même une équivalence ici.*
- **Multiplier membre à membre deux inégalités de réels positifs** : si  $0 < a < b$  et  $0 < c < d$  alors  $ac < bd$

**Information :** Bien entendu, le cas d'inégalité large ( $\leq$  ou  $\geq$ ) est vérifié à chaque fois étant donné que le cas d'égalité est vrai.

**Exemple :**

- Si  $x < 6$  et  $y < 4$  on a alors  $x + y < 10$ ;
- Si  $x < 2$  alors  $5x < 10$  et  $-3x > -6$ ;
- Si  $0 < x < y$  on a alors :  $0 < 3x < 5y$ .

**À retenir :**

- On peut ajouter membre à membre des inégalités et si l'une d'entre elles est stricte, alors l'inégalité obtenue l'est aussi;
- Multiplier une inégalité par un nombre strictement positif préserve le sens de l'inégalité;
- Multiplier une inégalité par un nombre strictement négatif renverse le sens de l'inégalité;
- On peut multiplier membre à membre des inégalités de réels **positifs**.

**Erreur fréquente :** On ne peut pas soustraire des inégalités membres à membres

L'assertion :

~~« Si  $a < b$  et  $c < d$  alors  $a - c < b - d$  »~~

est **FAUSSE!**

Voici un contre-exemple :  $4 < 5$  et  $-2 < 3$  alors  $4 - (-2) = 6$  et  $5 - 3 = 2$  pourtant on vient bien que  $4 - (-2) \not< 5 - 3$ . Petite explication, pour mieux sentir le soucis : soustraire membre à membre deux inégalités revient d'abord à multiplier par  $-1$  une inégalité, c'est-à-dire passer de  $-2 < 3$  à  $2 > -3$  (on change alors le sens de l'inégalité) puis à ajouter les deux inégalités. Et le problème intervient lorsque l'on cherche à ajouter les nouvelles inégalités car on a alors une condition importante de la propriété : **les deux inégalités doivent avoir le même sens d'inégalité.**

### ✂ À savoir faire 12 : Manipuler les inégalités

1. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \leq 1$  et  $y \leq 2$ , on a  $4x + 3y \leq 10$

.....

.....

.....

.....

2. Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \geq 4$  et  $y \geq 1$ , on a  $3 + xy \geq 7$

.....

.....

.....

.....

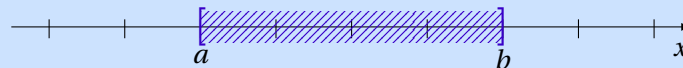
## B - Intervalles

### Définition 20 : Intervalle fermé

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a \leq b$ . On appelle **intervalle fermé**, que l'on notera  $[a, b]$  l'ensemble des réels  $x$  tels que :  $a \leq x \leq b$ . On a alors :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

On représentera cet intervalle fermé de la façon suivante :

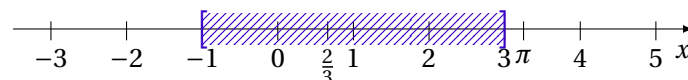


### Exemple :

L'intervalle fermé  $[-1, 3]$  est l'ensemble des nombres réels compris entre  $-1$  et  $3$  au sens large, c'est-à-dire :

$$[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 3\}$$

Graphiquement on a :



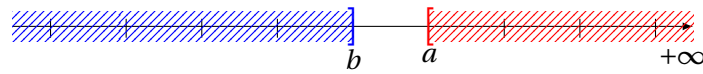
On a alors  $0 \in [-1, 3]$ ,  $\frac{2}{3} \in [-1, 3]$  mais  $\pi \notin [-1, 3]$

**! Information :** Que se passe-t-il lorsque  $a = b$

L'intervalle  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq a\} = \{a\}$ , devient un singleton.

**! Attention :** Que se passe-t-il lorsque  $a > b$

L'intervalle  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} = \emptyset$ , devient vide car il n'existe aucun  $x \geq a$  et  $x \leq b$  car  $a > b$ . Graphiquement il faut être dans l'intervalle bleu et dans l'intervalle rouge :



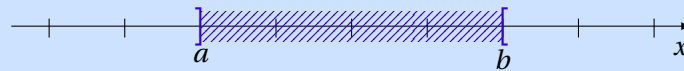
On retiendra bien qu'un intervalle du type  $[2, 1]$  n'existe pas!

### Définition 21 : Intervalle ouvert

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . On appelle **intervalle ouvert**, que l'on notera  $]a, b[$  l'ensemble des réels  $x$  tels que :  $a < x < b$ . On a alors :

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

On représentera cet intervalle ouvert de la façon suivante :



**À retenir :** La différence entre l'intervalle fermé et l'intervalle ouvert? La seule différence entre l'intervalle fermé  $[a, b]$  et l'intervalle  $]a, b[$  est l'inclusion ou non des bornes. Dans le premier les bornes sont comprises dans l'ensemble de nombre considéré, dans le second les bornes ne le sont pas. Concrètement nous avons :

$$]a, b[ = [a, b] \setminus \{a, b\}$$

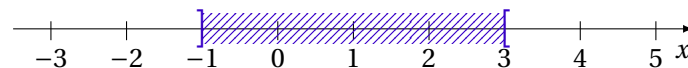
L'intervalle ouvert c'est l'intervalle fermé auquel on a retiré les deux bornes.

### Exemple :

L'intervalle ouvert  $] -1, 3[$  est l'ensemble des nombres réels compris entre -1 et 3 au sens large, c'est-à-dire :

$$]-1, 3[ = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\}$$

Graphiquement on a :



On a  $-1 \notin ] -1, 3[$  et  $3 \notin ] -1, 3[$

**Attention :** Ici on impose  $a < b$

Car si  $a = b$  on a alors  $]a, b[ = ]a, a[ = \emptyset$ , de la même manière que précédemment si  $a > b$  l'intervalle ouvert est alors vide.

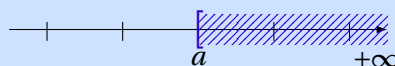
### Définition 22 : Intervalles non bornés

Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,

- L'intervalle  $[a, +\infty[$  est l'ensemble des nombres  $x$  tels que  $x \geq a$ . On a alors :

$$[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

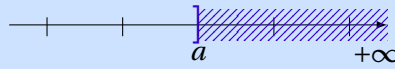
Graphiquement on a :



- L'intervalle  $]a, +\infty[$  est l'ensemble des nombres  $x$  tels que  $x > a$ . On a alors :

$$]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

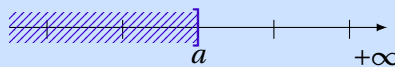
Graphiquement on a :



- L'intervalle  $] -\infty, a]$  est l'ensemble des nombres  $x$  tels que  $x \leq a$ . On a alors :

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$

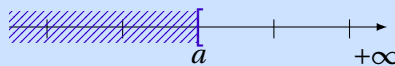
Graphiquement on a :



- L'intervalle  $] -\infty, a[$  est l'ensemble des nombres  $x$  tels que  $x < a$ . On a alors :

$$]-\infty, a[ = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$

Graphiquement on a :



**Information :** Crochet ouvert en  $\pm\infty$

$+\infty$  se lit "+ infini" et  $-\infty$  se lit "- infini", ce ne sont pas des nombres. Il est impossible de les atteindre, donc par définition nous mettrons toujours des crochets ouverts en  $\pm\infty$ .

**À savoir faire 13 : Manipuler représentation, inégalité d'un intervalle.**

Compléter le tableau suivant :

Représentation	Inégalité	Intervalle
	...	...
	$-7 \leq x < -9$	...
	...	$] -1, 1]$
	$x > 11$	...
	...	$] -\infty, 2[$

### À retenir : Cas particulier

- $] -\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$
- $] -\infty, 0] = \mathbb{R}_-$
- $[0, +\infty[ = \mathbb{R}_+$
- $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

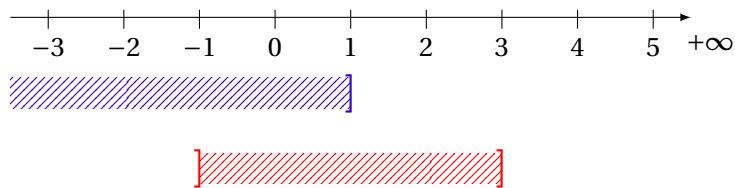
## C - Union et intersection d'intervalles

Voyons sur plusieurs exemples comment déterminer l'union et l'intersection de deux intervalles.

### Exemple :

Soit  $I_1 = ] -\infty, 1]$  et  $I_2 = ] -1, 3]$ .

Pour déterminer l'union et l'intersection de  $A$  et  $B$  on peut penser à représenter ces deux intervalles sur une droite graduée.



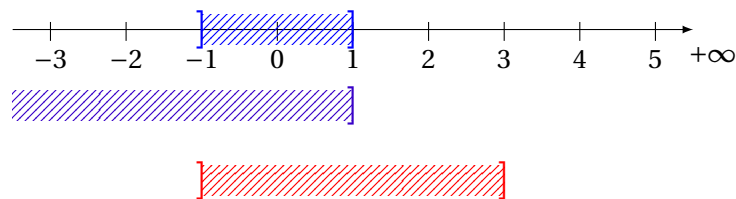
Pour obtenir :

- L'intersection  $I_1 \cap I_2$  :
  - Nous allons d'abord chercher la zone présente dans les deux intervalles représentés, ici c'est la zone entre -1 et 1.
  - Par la suite nous faisons l'étude des bornes pour connaître le sens des crochets.
    - En -1, comme  $-1 \notin I_2$  car c'est un crochet ouvert, on a alors :  $-1 \notin I_1 \cap I_2$  (car il faut être dans les deux pour être dans l'intersection!) ainsi nous avons un crochet ouvert en -1

$$]-1, 1 \dots$$

- En 1, comme  $1 \in I_1$  et  $1 \in I_2$  on a alors :  $1 \in I_1 \cap I_2$  ainsi nous avons un crochet fermé en 1

$$I_1 \cap I_2 = ] -1, 1]$$

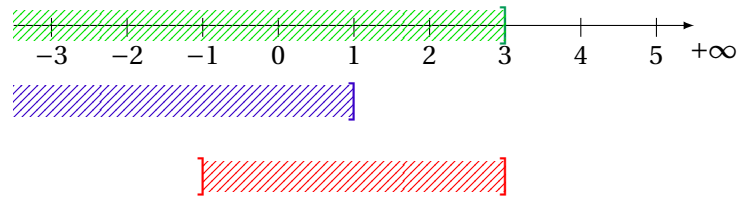


- L'union  $I_1 \cup I_2$  :
  - Nous allons d'abord chercher la zone recouvrant  $I_1$  ou  $I_2$ , ici c'est la zone entre  $-\infty$  et 3.
  - Par la suite nous faisons l'étude des bornes pour connaître le sens des crochets.
    - En  $-\infty$ , par définition crochet ouvert

$$]-\infty, 3 \dots$$

- En 3, comme  $3 \in I_2$  on a alors :  $3 \in I_1 \cup I_2$  (car pour être dans l'union il suffit d'être dans au moins l'un des deux) ainsi nous avons un crochet fermé en 3

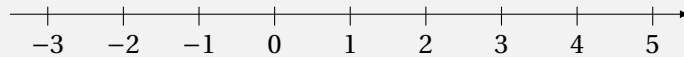
$$I_1 \cup I_2 = ] -\infty, 3]$$



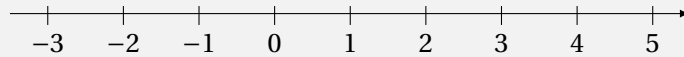
### ✂ À savoir faire 14 : Déterminer l'union et l'intersection de deux intervalles

Représenter et déterminer l'union et l'intersection de chacun des couples d'intervalles suivant :

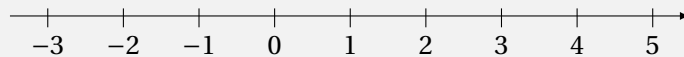
1. Pour  $I_1 = ]-1, 2]$  et  $I_2 = ]0, 3[$



2. Pour  $I_1 = [-1, 1[$  et  $I_2 = ]2, 3[$



3. Pour  $I_1 = ]-\infty, 2]$  et  $I_2 = ]2, +\infty[$



**Partie IV Exercices**

**A - Ensembles de nombres**

★★★☆☆ EXERCICE 1 (Nature) ..... ①

Déterminer la nature de chacun des nombres suivants :

- |                   |                    |                        |                                |
|-------------------|--------------------|------------------------|--------------------------------|
| 1. $\frac{81}{4}$ | 4. $-\frac{9}{60}$ | 7. $\frac{\pi}{4}$     | 10. $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)$ |
| 2. $\frac{15}{5}$ | 5. $-\frac{5}{4}$  | 8. $\frac{5\pi}{4\pi}$ | 11. $5 \times 10^{-3}$         |
| 3. $-\frac{1}{3}$ | 6. $5 \times 10^4$ | 9. $\sqrt{0,81}$       | 12. $\frac{2}{10^{-2}}$        |

★★★☆☆ EXERCICE 2 (Tableau) ..... ②

Compléter le tableau ci-dessous, dans lequel une croix signifie que le nombre appartient à l'ensemble correspondant. On entourera la croix donnant la nature de chaque nombre.

	N	Z	D	Q	R
$-\frac{5}{2}$					
$-\frac{6}{2}$					
$\sqrt{121}$					
$2\pi$					
$4,5 \times 10^{-4}$					
$\frac{617}{8}$					

**B - Manipulation d'inégalités**

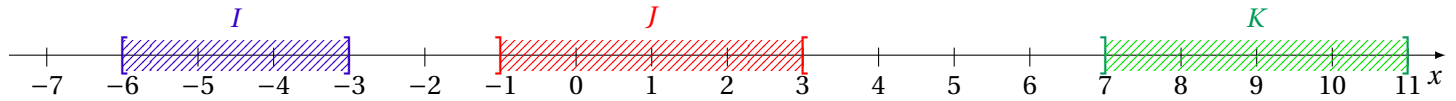
★★★☆☆ EXERCICE 3 (Inégalités) ..... ③

- Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \geq 3$  et  $y \geq 1$ , on a  $4x + 2y \geq 14$
- Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \leq 10$  et  $y \geq 1$ , on a  $2x - 4y \leq 16$
- Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \leq 1$  et  $y \leq 1$ , on a  $\frac{3}{2}x + \frac{y}{2} \leq 2$
- Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x < 6$  et  $y > -10$ , on a  $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} < 4$
- Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x < 2$  et  $y < -2$ , on a  $-3x - 2y > -2$
- Démontrer que, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  vérifiant :  $0 \leq x \leq 1$  et  $-1 \leq y \leq 0$ , on a  $-2 \leq 4x + 2y \leq 4$
- Considérons  $x$  et  $y$  deux nombres réels vérifiant :  $-1 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ 
  - Démontrer que :  $-\frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{3}{4}$
  - Démontrer que :  $-\frac{3}{2} \leq x - y \leq 1$

**C - Intervalles**

★★★☆☆ EXERCICE 4 (Représentations) ..... (L)

On a représenté trois intervalles  $I, J$  et  $K$  sur la droite graduée ci-dessous :



Compléter les équivalences suivantes :

1.  $x \in I \Leftrightarrow x \in \dots \Leftrightarrow \dots \leq x \leq \dots$       2.  $x \in J \Leftrightarrow x \in \dots \Leftrightarrow \dots x \dots$       3.  $x \in K \Leftrightarrow x \in \dots \Leftrightarrow \dots x \dots$

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Tableau) ..... (L)

Compléter le tableau suivant, à l'aide d'un intervalle, d'une inégalité ou d'une représentation :

Représentation	Inégalité	Intervalle
	...	...
	$-3 < x \leq 0$	...
	...	$[-4, 2[$
	$x < 3$	...
	...	$]9, +\infty[$

★★★☆☆ EXERCICE 6 (Représentations #2) ..... (L)

Dans chaque cas déterminer avec un ou des intervalles l'ensemble représenté :

- 
- 
- 

★★★☆☆ EXERCICE 7 (Appartenance) ..... (L)

Recopier et compléter par  $\in$  ou  $\notin$

1.  $-2,5...[-3,5]$

3.  $-7...]-6,-3[$

5.  $0...]0,+\infty[$

7.  $1,3...[-5,0[\cup]2,+\infty[$

2.  $\frac{\pi}{2}...[-3,3[$

4.  $1...[1,6[$

6.  $10^{-1}...]-\infty,0]$

8.  $-4...[-3,+\infty[$

★★★☆☆ EXERCICE 8 (Union/ Intersection) ..... ①

Considérons les intervalles  $I = [-2,4]$ ,  $J = [-5,2[$  et  $K = ]-3,5[$  Déterminer et représenter sur une droite graduée :

1.  $L = I \cap J$

2.  $M = I \cup J$

3.  $N = K \cap I$

4.  $P = I \cap J \cap K$

★★★☆☆ EXERCICE 9 (Union/ Intersection #2) ..... ②

Dans chacun des cas, représenter les intervalles donnés  $I$  et  $J$  sur une droite graduée, puis exprimer sous forme d'intervalles  $I \cap J$  et  $I \cup J$ .

1.  $I = [-4,2]$  et  $J = [-1,6]$

3.  $I = ]-\infty,7]$  et  $J = ]-\infty,4]$

2.  $I = ]-\infty,3]$  et  $J = [-2,+\infty[$

4.  $I = ]-\infty,-1]$  et  $J = [-1,+\infty[$