CHAPITRE 10

Fonctions de références

Plan du chapitre

Partie I Fonctions affines

A - Définitions

Définition 1 : Fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

Exemple :

- $f : x \mapsto -5x + 2$ est une fonction affine tel que : $a = -5$ et $b = 2$;
- $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} - 4$ est une fonction affine tel que : $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -4$.

Information : Cas particulier

- $x \mapsto ax$ (ici $b = 0$) est une fonction affine particulière appelée **fonction linéaire**;
- $x \mapsto b$ (ici $a = 0$) est une fonction affine particulière appelée **fonction constante**.

À savoir faire 1 : Fonction affine? Linéaire? Constante?

Mettre une croix là où la réponse est `oui`.

	Affine	Linéaire	Constante
$f(x) = 5x + 2$			
$g(x) = 3x^2$			
$h(x) = -\sqrt{2}x$			
$i(x) = 7 + 2x - 7$			
$j(x) = 3x \times 5$			
$k(x) = 6$			
$l(x) = 6(4x - 2)$			
$m(x) = 6x + 5 - 6x$			
$n(x) = 5x(2x - 1)$			

Définition 2 : Racine

Un nombre réel x_0 est une racine d'une f (quelconque) lorsque $f(x_0) = 0$.

Exemple :

- Pour $f(x) = 5x$, 0 est racine de f en effet : $f(0) = 5 \times 0 = 0$;
- Pour $g(x) = 5x + 3$, $-\dfrac{3}{5}$ est racine de g en effet : $g\left(-\dfrac{3}{5}\right) = 5 \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) + 3 = -3 + 3 = 0$;
- Pour $h(x) = -2x + 7$, $\dfrac{7}{2}$ est racine de h en effet : $h\left(\dfrac{7}{2}\right) = -2 \times \dfrac{7}{2} + 7 = -7 + 7 = 0$;

À savoir faire 2 : Racines

1. Déterminer les racines de $f : x \mapsto -3x+4$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Déterminer les racines de $g : x \mapsto -7-x$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Déterminer les racines de $h : x \mapsto -\frac{x}{4}+5$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Propriété 1 : Racine d'une fonction affine

Pour une fonction affine, non constante $(a \neq 0)$, $f(x) = ax+b$ on a $-\frac{b}{a}$ qui est l'unique racine de f.

Information : Le cas d'une fonction constante

- ou bien $b=0$ donc $f(x)=0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi f possède tous les nombres réels x comme racine ;
- ou bien $b \neq 0$ donc $f(x) = b \neq 0$, ainsi f ne possède aucune racine.

B - Variations, extrema et signes

Dans le cas où $a=0$, on a alors $f : x \mapsto ax+b=b$ est une fonction constante.
On supposera dans ce cas là que $a \neq 0$.

Propriété 2 : Variations

- $f : x \mapsto ax+b$ est croissante si $a>0$;
- $f : x \mapsto ax+b$ est décroissante si $a<0$.

Exemple :

- La fonction $f : x \mapsto 2x-5$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a=2>0$;
- La fonction $g : x \mapsto -\frac{x}{2}+1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $a=-\frac{1}{2}<0$.

Propriété 3 : Extrema

Soit $f : x \mapsto ax+b$, f possède ni maximum ni minimum sur $\mathbb{R}$.

Propriété 4 : Signes

Soit $f : x \mapsto ax+b$, avec $a \neq 0$.

- $f(x)$ est du signe de a pour $x \in \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$;
- $f(x)$ est du signe opposé de a pour $x \in \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$

On retiendra :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	$-\mathtt{sgn}(a)$	0	$\mathtt{sgn}(a)$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto -2x+3$, alors $f_1(x)$ est du signe de -2 sur $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ et du signe contraire de -2 sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$.
C'est-à-dire :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

À savoir faire 3 : Signes d'une fonction affine

Dresser le tableau de signe de $g : x \mapsto \frac{x}{2} - 4$ sur $\mathbb{R}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

C - Représentation graphique

Propriété 5 :

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.
La droite $\mathscr{D}$ représentant la fonction $f : x \mapsto ax+b$ on dit que :

- a est le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$;
- b est l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$.

Propriété 6 :

Pour f une fonction affine tel que $f(x) = ax + b$.
Pour tous réels $x_1 \neq x_2$ on a :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est le **taux d'accroissement** de f entre x_1 et x_2.

À savoir faire 4 : Retrouver l'expression d'une affine

Soit f une fonction affine tel que $f(1) = 3$ et $f(4) = 2$, retrouver l'expression de la fonction affine f.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Méthode 1 : Tracer la courbe d'une fonction affine

Considérons la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$.

- **Étape 1 :** On place le point $(0; b)$ qui appartient à la courbe de f ;
- **Étape 2 :** On note le coefficient directeur a de la façon suivante :

$$a = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

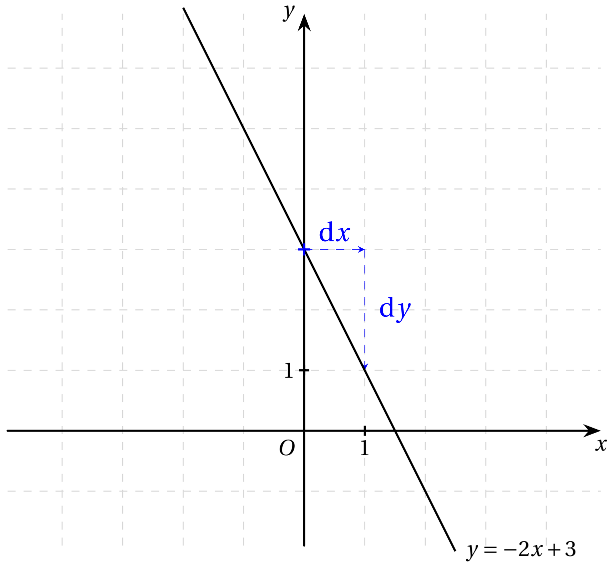
  où $\mathrm{d}y$ représentera le déplacement selon (Oy) et $\mathrm{d}x$ le déplacement selon (Ox) ;
- **Étape 3 :** À partir du point $(0, b)$ on réalise les déplacements $\mathrm{d}y$ puis $\mathrm{d}x$ (ou inversement) ;
- **Étape 4 :** On obtient alors un nouveau point qui appartient à la courbe de f ;
- **Étape 5 :** On trace alors la droite passant par ces deux points.

Exemple :

On souhaite tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto -2x + 3$ que l'on notera : $\mathscr{D}$.

- **Étape 1 :** On place le point $(0, 3)$;
- **Étape 2 :** On a $-2 = \dfrac{-2}{1}$ donc on a $\mathrm{d}y = -2$ et $\mathrm{d}x = 1$;

- **Étape 3 :** On représente les déplacements et on place un nouveau point de la droite ;
- **Étape 4 :** On relie les deux points.



Méthode 2 : Tracer la courbe d'une fonction affine

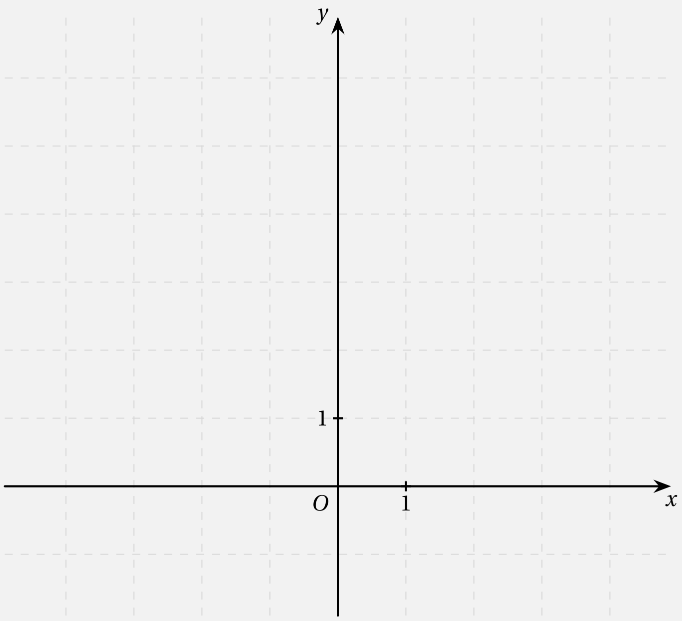
Considérons la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

- **Étape 1 :** On place le point $(0; b)$ qui appartient à la courbe de f ;
- **Étape 2 :** On calcule l'image d'un point quelconque x_1 par la fonction f ;
- **Étape 3 :** On place le point $\left(x_1, f(x_1)\right)$;
- **Étape 4 :** On trace alors la droite passant par ces deux points.

À savoir faire 5 : Tracer la courbe d'une fonction affine

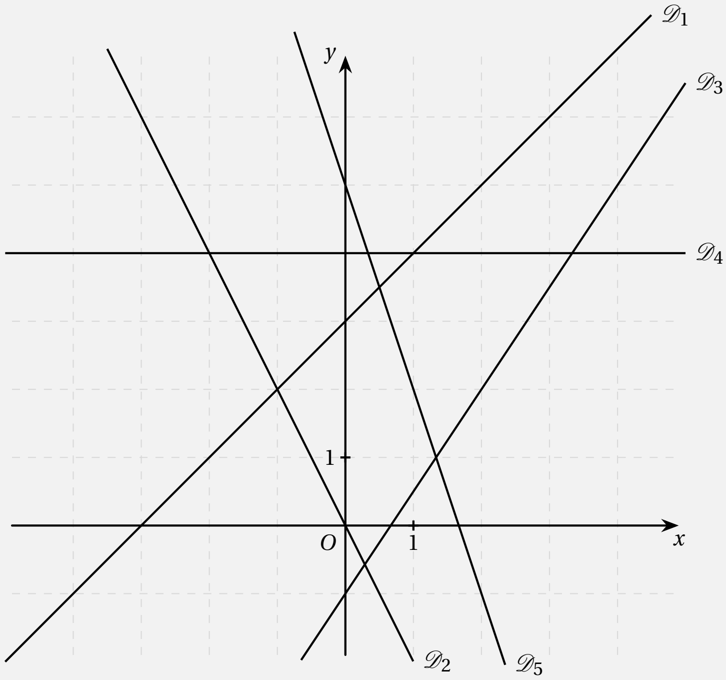
Représenter graphiquement les fonctions affines suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{3}{4}x + 2$;
2. $g(x) = -x - 1$;
3. $h(x) = 2x$



À savoir faire 6 : Retrouver l'équation de droite

On trace cinq droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2, \cdots$, $\mathscr{D}_5$ représentant respectivement $f_1, f_2, \cdots, f_5$.
Déterminer l'expression de chacune de ces fonctions.



....

....

....

....

....

....

....

....

Partie II Fonction carré

A - Définition

Définition 3 :

La fonction carré est la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Propriété 7 : Paire

La fonction carré est paire sur $\mathbb{R}$.

***Démonstration* :**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ de plus :

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

■

B - Variations, extrema et signes

Propriété 8 : Variations

La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

***Démonstration* :**

La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, en effet :
pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, tel que $x_1 < x_2$ on a :

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \geq 0$$

car $x_2 > x_1$ donc $x_2 - x_1 > 0$ et $x_2, x_1 \geq 0$ donc $x_2 + x_1 \geq 0$. Ainsi :

$$x_1^2 \leq x_2^2$$

Ainsi on vient de démontrer que la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
On démontre de même que la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$. ■

Propriété 9 : Maximum - minimum

La fonction carré ne possède pas de maximum sur $\mathbb{R}$.
Cependant, 0 est le minimum de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, atteint en $x = 0$.

Le bilan de ces deux propriétés est donné par :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de $x \longmapsto x^2$		↘	0	↗	

Propriété 10 : Signe

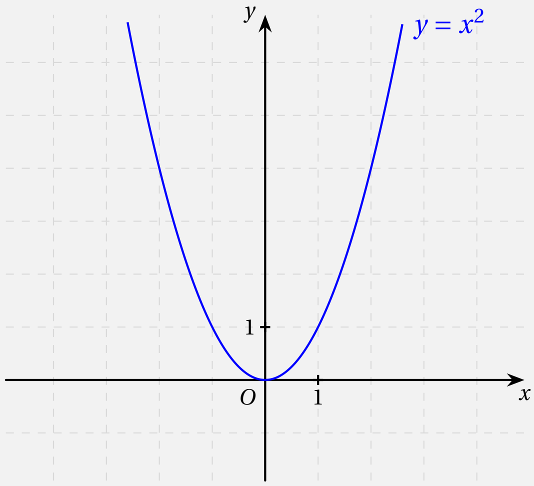
La fonction carré est positive sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = 0$.
On retiendra :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de x^2		$+$	0	$+$	

C - Représentation graphique

Propriété 11 :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est une **parabole**.
Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés.



Partie III Fonction cube

A - Définition

Définition 4 :

La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

Propriété 12 : Impaire

La fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$.

***Démonstration* :**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ de plus :

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

■

B - Variations, extrema et signes

Propriété 13 : Variation

La fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$.

***Démonstration* :**

Démontrons que la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que : $0 \leq x_1 < x_2$ on a alors $x_1^2, x_2^2 \geq 0$.
On a alors :

- **D'une part :** $x_1^3 \leq x_1^2 x_2$ car $x_1^2 \geq 0$;
- **D'autre part :** $x_1 x_2^2 \leq x_2^3$ car $x_2^2 > 0$;
- Ainsi par croissante de la fonction $t \mapsto x_1 x_2 t$ car $x_1 x_2 > 0$ on a alors :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 x_2 x_1 \leq x_1 x_2 x_2 \text{ c'est-à-dire } x_1^2 x_2 \leq x_1 x_2^2$$

D'où :

$$x_1^3 \leq x_1^2 x_2 \leq x_1 x_2^2 < x_2^3$$

D'où la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et impaire sur $\mathbb{R}$ d'où par parité de la fonction cube on a alors que la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$. ■

Propriété 14 : Maximum - minimum

La fonction cube ne possède ni maximum ni minimum sur $\mathbb{R}$.

Propriété 15 : Signes

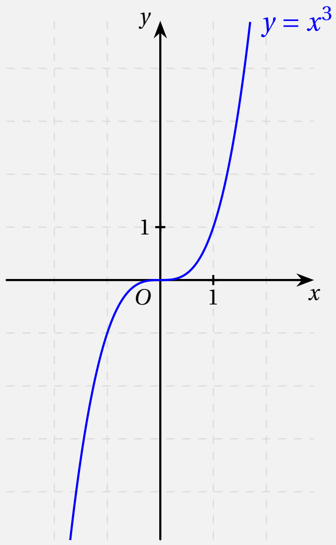
La fonction cune est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$ et s'annume en $x = 0$.
On retiendra :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de x^3		$-$	0	$+$	

C - Représentation graphique

Propriété 16 : Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction cube est est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Partie IV Fonction racine carrée

A - Définitions

Définition 5 : Racine carrée

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la racine carrée de x, notée $\sqrt{x}$, est l'unique nombre positif qui élevé au carré est égal à x.

Définition 6 : Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

B - Variations, extrema et signes

Propriété 17 : Variations

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration :

Soient $0 \leq x_1 < x_2$, on a :

$$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right) = \sqrt{x_1}^2 - \sqrt{x_2}^2 = x_1 - x_2 \text{ car } x_1, x_2 \geq 0$$

Comme $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ et $x_1 - x_2 < 0$ ainsi on a alors : $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} < 0$ c'est-à-dire : $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.
D'où $\sqrt{.}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. ■

Propriété 18 : Maximum-minimum

Le minimum de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ est 0 atteint en $x = 0$.
La fonction racine carrée ne possède pas de maximum sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété 19 : Signe

La fonction racine carrée est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration :

Par définition même de la racine carrée d'un nombre, $\sqrt{x} \geq 0$ pour $x \geq 0$. ■

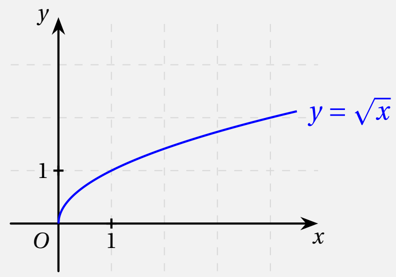
On retiendra :

x	0		$+\infty$
Signe de $\sqrt{x}$	0	$+$	

C - Représentation graphique

Propriété 20 : Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction racine carrée est une demi parabole.



Information : La courbe représentative de la fonction racine carrée correspond à la moitié droite d'une parabole d'équation $y = x^2$.

★★⯪☆☆ **Exercice 1** (Domaine de définition) ....

Déterminer les domaines de définitions des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{6-2x}$;
2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{(x-2)(5-x)}$;
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$;

Partie V Fonction inverse

A - Définitions

Définition 7 :

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 21 : Impaire

La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$.

***Démonstration* :**

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$ de plus on a :

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

■

B - Variations, extrema et signes

Propriété 22 : Variations

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

Démonstration :

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $x_1 < x_2$, on a alors :

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0 \text{ car } x_2 > x_1 \text{ et } x_1, x_2 > 0$$

D'où $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.
Donc la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On prouve de la même manière que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. ■

Propriété 23 : Maximum - minimum

La fonction inverse ne possède ni maximum ni minimum sur $\mathbb{R}^*$.

On a alors le tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \frac{1}{x}$	↘	‖	↘

Propriété 24 : Signes

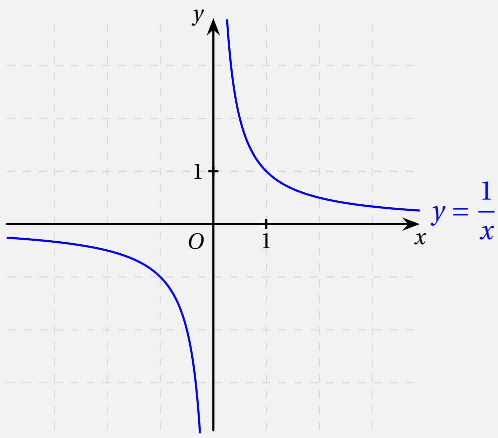
La fonction inverse est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$.
On retiendra :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	$-$	‖	$+$

C - Représentation graphique

Propriété 25 : Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole** et est symétrique par rapport à l'origine du repère



★★★⯪☆ **EXERCICE 2** (Domaine de définition #2) ....

Déterminer les domaines de définitions des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{7-4x}{5-2x}$;
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{7x^2+5x+6}{5x^2-2}$;
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{8-4x}}$;
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x+5}{6-2x}}$;
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{6-2x}}$;