CHAPITRE 1

Calcul numérique et littéral

Plan du chapitre

Introduction

Le calcul numérique et littéral est primordial pour manipuler et simplifier les différents calculs auxquels vous allez faire face tout au long de l'année. Nous commencerons par revoir les règles de calcul sur les fractions, les puissances et les racines carrées. Ensuite nous nous attarderons sur le calcul littéral, qui sera un point majeur de l'année de Seconde, en apprenant à développer et à factoriser des expressions algébriques.

Partie I Calcul numérique

A - Fractions

Propriété 1 : Fractions égales

Pour tout a, b et k des nombres réels tels que : $b \neq 0$ et $k \neq 0$, on a :

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

À retenir : On a : $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Point chaud : On s'efforcera tout au long de l'année à bien se rappeler qu'une égalité se lit dans les deux sens, aussi bien de gauche à droite (vous en avez l'habitude) mais aussi de droite à gauche (moins évident).

- ($\rightarrow$) Ce sens nous permet de **simplifier** une fraction,
- ($\leftarrow$) Ce sens nous permet de **changer le dénominateur** d'une fraction

Exemple :

- $\frac{9}{12} = \frac{3\times3}{3\times4} = \frac{3}{4}$, nous venons de **simplifier** notre fraction ;
- $\frac{2}{3} = \frac{4\times2}{4\times3} = \frac{8}{12}$ nous venons de **mettre** notre fraction sur 12.

À savoir faire 1 : Simplification de fractions et mise sous même dénominateur

1. Simplifier les fractions suivantes : $\frac{4}{8}, \frac{12}{3}, \frac{21}{3}, \frac{75}{25}$ et $\frac{7}{3}$.
   À corriger
2. Mettre les fractions (ou les nombres) suivantes sur 24 : $\frac{7}{3}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{15}{12}$ et 2.
   À corriger
3. Mettre les couples de fractions suivants sur le même dénominateur : $\frac{5}{3}$ et $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$ et $\frac{7}{60}$, $\frac{3}{10}$ et $\frac{5}{6}$
   À corriger

Erreur fréquente : On vient de voir que l'on pouvait simplifier une fraction dans le cas d'un facteur commun non nul k, donc d'une multiplication, au numérateur et au dénominateur d'une fraction, c'est-à-dire :

$$\frac{\cancel{k}a}{\cancel{k}b} = \frac{a}{b}$$

En revanche nous n'avons pas (en général) la simplification par k lorsque nous avons une addition par k au numérateur et au dénominateur :

$$\xcancel{\frac{a+k}{b+k} = \frac{a}{b}}$$

Propriété 2 : Somme de fractions

Pour tout a, b et d des nombres réels tel que $d \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$$

*On peut **ajouter** des fractions quand elles ont le **même dénominateur**. Dans ce cas, on ajoute les numérateurs entre eux et on conserve le dénominateur commun.*

Attention : Dans le cas où les dénominateurs ne sont **différents**, nous ne **pouvons pas** faire la somme des deux fractions, il faut d'abord mettre les deux fractions au même dénominateur (notamment grâce à la propriété des fractions égales).

Point chaud : Encore une fois l'égalité se lit dans les deux sens et ici cela nous permet de :

- $(\rightarrow)$ sommer de deux fractions pour obtenir une unique fraction,
- $(\leftarrow)$ scinder une fraction en deux fractions.

Exemple :

- $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}$, on vient de **sommer** deux fractions de même dénominateur ;
- $\frac{7}{3}=\frac{6+1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$, on vient de **scinder** deux fractions. Ici ça nous permet d'affirmer que $\frac{7}{3}$ est comprit entre 2 et 3 car $\frac{1}{3}$ est positif et inférieur à 1. On notera : $2<\frac{7}{3}<3$

À savoir faire 2 : Sommer deux fractions ayant un dénominateur commun ou non !

1. Déterminer les sommes suivantes : $\frac{7}{3}+\frac{2}{3}, \frac{1}{4}-\frac{3}{4}, 2+\frac{7}{3}$ et $\frac{8}{7}+\frac{5}{-7}$
   À corriger
2. Déterminer les sommes suivantes : $\frac{7}{3}+\frac{5}{4}, \frac{11}{8}+\frac{15}{12}, \frac{5}{3}+\frac{1}{4}, \frac{4}{5}+\frac{7}{60}$ et $\frac{3}{10}+\frac{5}{6}$
   À corriger

À savoir faire 3 : Encadrer une fraction

Donner un encadrement pour chacune des fractions suivantes :

- $\frac{5}{4}$
  Comme $\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}$ on a alors : $1 \leq \frac{5}{4} \leq 2$
- $-\frac{9}{6}$
  Comme $-\frac{9}{6}=-1-\frac{3}{6}=-1-\frac{1}{2}$ on a alors : $-2 \leq -\frac{9}{6} \leq -1$
- $\frac{12}{15}$
  $0 \leq \frac{12}{15} \leq 1$
- $\frac{53}{24}$
  Comme $\frac{53}{24}=2+\frac{5}{24}$ on a alors : $2 \leq \frac{5}{4} \leq 3$

Propriété 3 : Produit de fractions

Pour tout a, b, c et d des nombres réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

*On **multiplie** des fractions en multipliant leurs numérateurs entre eux et leurs dénominateurs entre eux.*

Point chaud : Lorsque l'on a de très grand nombre à multiplier entre eux, généralement on ne s'amuse pas à faire le produit des deux. On va plutôt chercher à simplifier les deux fractions entre elles pour faciliter le produit.

Exemple :

- $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3\times5}{4\times7} = \frac{15}{28}$
- $4 \times \frac{3}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$
- $\frac{7}{16} \times \frac{8}{21} = \frac{\cancel{7}}{2\times\cancel{8}} \times \frac{\cancel{8}}{3\times\cancel{7}} = \frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$

Erreur fréquente : Que reste-t-il lorsqu'il n'y a plus rien ?
On vient de voir qu'après simplification au numérateur il ne restait "plus rien", lors d'une multiplication lorsqu'il ne reste "plus rien" il y a toujours un 1 (une multiplication par 1). Ne faîtes pas l'erreur de noter 0 !

À savoir faire 4 : Déterminer le produit de deux fractions.

Déterminer les produits suivants :

- $\frac{5}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{5\times3}{2\times2\times3} = \frac{5}{4}$
- $\frac{-6}{2} \times \frac{8}{3} = -\frac{6\times8}{6} = -\frac{1}{8}$
- $\frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4}$
- $\frac{15}{24} \times \frac{9}{60} = \frac{5\times3\times3\times3}{3\times8\times3\times5\times4} = \frac{3}{32}$

Propriété 4 : Inverse d'un nombre réel (non nul)

Pour tout a et b deux nombres réels non nuls, on a :

- L'inverse de a est $\frac{1}{a}$;
- L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Exemple :

- L'inverse de 4 est : $\frac{1}{4}$;
- L'inverse de -1 est : $\frac{1}{-1} = -\frac{1}{1} = -1$ (lui même!)
- L'inverse de $\frac{4}{7}$ est $\frac{7}{4}$.

Information : L'inverse d'un nombre réel x est l'unique nombre, que l'on notera y, qui multiplié par x est égal à 1, c'est-à-dire : $x \times y = 1$.
C'est par définition que l'inverse de 0 n'existe pas, en effet pour tout y réel on a $0 \times y = 0$ ainsi il n'existe pas de réel qui multiplié par 0 est égal à 1. Donc 0 ne possède pas d'inverse.

***Démonstration* :**

- Soit a un nombre réel non nul, comme a est non nul, la fraction $\frac{1}{a}$ est bien définie. De plus :

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{\cancel{a}}{1} \times \frac{1}{\cancel{a}} = \frac{1}{1} = 1$$

On remarque alors que $\frac{1}{a}$ est le nombre réel qui multiplié par a est égal à 1.
Ainsi $\frac{1}{a}$ est bien l'inverse de a.

- Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$, comme a et b sont non tous les deux nuls on a : $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ qui sont deux fractions définies. De plus :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

■

Propriété 5 : Quotient de fractions

Pour tout nombres a, b, c et d des nombres réels tels que : $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :

- $\frac{a}{\frac{c}{d}} = a \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

À retenir : Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Exemple :

- $\frac{2}{\frac{5}{7}} = 2 \times \frac{7}{5} = \frac{2\times 7}{5} = \frac{14}{5}$;
- $\frac{\frac{3}{5}}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{5\times 4} = \frac{3}{20}$;
- $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{7} = \frac{3}{7}$
- $\frac{7}{9} \div \frac{5}{4} = \frac{7}{9} \times \frac{5}{4} = \frac{35}{36}$

Propriété 6 : Priorités opératoires

1. On effectue d'abord les calculs entre parenthèses ;
2. Ensuite, les calculs de puissances ou de racines carrées ;
3. Puis les multiplications ou divisions, de gauche à droite ;
4. Enfin les additions ou soustractions, de gauche à droite.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{2\times \cancel{2}}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}}\right)\\
&= \frac{1}{3} \div \frac{2}{3}\\
&= \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

À savoir faire 5 : Mélange

Effectuer les calculs suivants : $\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{5}$, $\frac{5}{4} \times \frac{2}{8} - \frac{2}{4}$ et $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} + \frac{3}{4}$

- $\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$
- $\frac{5}{4} \times \frac{2}{8} - \frac{2}{4} = \frac{5}{16} - \frac{1}{2} = \frac{5}{16} - \frac{8}{16} = -\frac{3}{16}$

- $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{28} + \dfrac{21}{28} = \dfrac{36}{28} = \dfrac{9}{7}$

B - Puissances

Définition 1 : Puissance

Soit a un nombre réel et n un entier naturel (entier positif), on pose :

$$a^0 = 1 \text{ et pour } n \geq 1 : a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Propriété 7 :

Pour a et b deux nombres réels tel que $b \neq 0$ et m et n deux nombres entiers, on a :

- **Produit de puissances :** $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- **Quotient de puissances :** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- **Puissance de puissances :** $(a^m)^n = a^{m\times n} = a^{mn}$
- **Puissance d'un produit :** $(ab)^n = a^n \times b^n$
- **Puissance d'un quotient :** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple :

- $2^3 \times 2 = 2^3 \times 2^1 = 2^{3+1} = 2^4$
- $\frac{3^5}{3^4} = 3^{5-4} = 3^1 = 3$
- $\left(10^4\right)^3 = 10^{4\times 3} = 10^{12}$
- $(2x \times 3y)^2 = (2x)^2 \times (3y)^2 = \left[2^2 \times x^2\right] \times \left[3^2 \times y^2\right] = 4x^2 \times 9y^2 = 36x^2y^2$
- $\left(\frac{2x^2}{5x}\right)^3 = \frac{(2x^2)^3}{(5x)^3} = \frac{2^3(x^2)^3}{5^3x^3} = \frac{8x^6}{75x^3} = \frac{8}{75}x^{6-3} = \frac{8}{75}x^3$

À retenir : Puissance de 10

Pour n un entier positif on a toujours :

$$10^n = 1\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{et} \quad 10^{-n} = \underbrace{0,00\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$$

Propriété 8 : Inverse d'une puissance

Pour $a \neq 0$ et n un entier naturel on a :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Démonstration :

En effet pour $a \neq 0$ et n un entier naturel on a :

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

D'où par définition a^{-n} est l'inverse de a^n donc on a l'égalité :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

■

À savoir faire 6 : Manipuler des puissances

1. Exprimer sous la forme a^n
   (a) $(7^4)^4 = 7^{4\times4} = 7^{16}$
   (b) $6^4 \times 6^3 = 6^{4+3} = 6^7$
   (c) $(-5)^3 \times 2^3 = (-5\times2)^3 = (-10)^3$
   (d) $\frac{10^3}{(-5)^3} = \left(-\frac{10}{5}\right)^3 = (-2)^3 = -8$
2. Exprimer sous la forme a^n
   (a) $\frac{4^3}{2} = \frac{2^6}{2} = 2^{6-1} = 2^5$
   (b) $\frac{2\times2^2}{4\times4} = \frac{2^3}{2^4} = \frac{1}{2}$
   (c) $\frac{5\times5^5}{25^2} = \frac{5^6}{5^4} = 5^2$
   (d) $\frac{8\times2}{4^6} = \frac{2^4}{2^{12}} = 2^{-8}$

C - Racines carrées

Définition 2 : Racine carrée

La **racine carrée** d'un nombre réel positif a, que l'on notera $\sqrt{a}$, est l'unique nombre **positif** dont le carré est égal à a.

À retenir : Pour $a \geq 0$, on a : $\sqrt{a} \geq 0$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Exemple :

Par définition $\sqrt{9}$ est l'unique nombre positif dont le carré est égal à 9, comme on sait que $3^2 = 9$. On peut alors affirmer que : $\sqrt{9} = 3$.

Pour manipuler correctement les racines carrées il est **primordial** de connaître la liste des premiers carrés parfait :

- $0^2 = 0$
- $1^2 = 1$
- $2^2 = 4$
- $3^2 = 9$
- $4^2 = 16$
- $5^2 = 25$
- $6^2 = 36$
- $7^2 = 49$
- $8^2 = 64$
- $9^2 = 81$
- $10^2 = 100$
- $11^2 = 121$
- $12^2 = 144$

À savoir faire 7 : Manipuler les racines

Déterminer les racines suivantes :

- $\sqrt{64} = 8$
- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{81} = 9$
- $\sqrt{121} = 11$
- $\sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{49} = 7$
- $\sqrt{144} = 12$

Propriété 9 : Règles

Pour a et b deux nombres réels positifs, on a :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemple :

- $\sqrt{48} = \sqrt{4 \times 12} = \sqrt{4} \times \sqrt{12} = 2 \times \sqrt{4 \times 3} = 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times 2 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

À retenir : Simplification de racine carrée

La méthode pour simplifier une racine carrée est de chercher à décomposer l'expression sous la racine à l'aide du plus petit carré parfait (différent de 1) qui le divise. Voilà pourquoi il est indispensable de connaître cette liste !
Voici la méthode sur un exemple :
Simplifions $\sqrt{45}$,

- On cherche le plus petit carré parfait (différent de 1 qui divise 45
  On teste avec 4, le premier carré parfait, mais 45 n'est pas divisible par 4 car il n'est pas pair.
  On essaye avec le suivant qui est 9, cette fois ci ça divise, car on a $45 = 9 \times 5$;
- Donc : $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5}$;
- Comme on sait que : $\sqrt{9} = 3$;
- On a alors : $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
- On s'arrête là car 5 n'est divisible par aucun carré parfait.

À savoir faire 8 : Manipuler les racines

Déterminer les racines suivantes :

- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{150} = \sqrt{25 \times 6} = 5\sqrt{6}$
- $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$
- $\sqrt{176} = \sqrt{16 \times 11} = 4\sqrt{11}$
- $\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$
- $\sqrt{147} = \sqrt{3 \times 49} = 7\sqrt{3}$

Partie II Calcul littéral

A - Développement

Définition 3 : Développer

Développer un produit, c'est transformer un produit en une somme.

A.1 - Distributivité

Propriété 10 : Simple et double distributivité

Soient a, b, c, d et k des nombres réels :

- **Simple distributivité :** $k \times (a+b) = ka + kb$
- **Double distributivité :** $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple :

- $2(5x-1) = 2 \times 5x + 2 \times (-1) = 10x - 2$
- $(2x+3)(4x-1) = 2x \times 4x + 2x \times (-1) + 3 \times 4x + 3 \times (-1) = 8x^2 - 2x + 12x - 3 = 8x^2 + 10x - 3$

A.2 - Identités remarquables

Propriété 11 : Identités remarquables de développement

Soient a et b deux nombres réels, on a :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

***Démonstration* :**

À démontrer ■

À savoir faire 9 : Développer et réduire une expression littérale

1. $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$
2. $(7x-3)^2 = 49x^2 - 42x + 9$
3. $(5x-4)(5x+4) = 25x^2 - 16$
4. $2a^2 - 3(a-5) + (3a-1)^2 = 2a^2 - 3a + 15 + \left(9a^2 - 6a + 1\right) = 11a^2 - 9a + 16$
5. $(7x-6)(7x+6) - (4x+3)^2 = 49x^2 - 36 - \left(16x^2 + 24x + 9\right) = 33x^2 - 24x - 45$

A.3 - Méthode (cas d'une distributivité simple et d'une distributivité double)

À retenir : Pour développer on suit les priorités opératoires, pour éviter certaines erreurs courantes chez les "neo-développeurs" on peut prioriser la double distributivité à la simple, même si on gardera en temps qu'il n'y a pas de priorité entre les deux.

Erreur fréquente : Pour ceux qui ne veulent pas écouter le conseil précédent voici ce qu'il ne faut surtout pas faire :

$$\cancel{k(a+b)(c+d) = (ka+kb)(kc+kd)}$$

Voici ce qu'il faut faire :

$$\boxed{k(a+b)(c+d) = (ka+kb)(c+d)}$$

Ou alors :

$$\boxed{k(a+b)(c+d) = (a+b)(kc+kd)}$$

À savoir faire 9 : Développer et réduire une expression littérale

1. $2(x+5)(2x-3) = 2\left(2x^2+7x-15\right) = 4x^2+14x-30$
2. $-3(2x+3)(5-3x) = -3\left(x-6x^2+15\right) = -3x+18x^2-45$

B - Factorisation

Définition 4 : Factoriser

Factoriser une somme, c'est transformer une somme en un produit.

B.1 - Facteur commun

Propriété 12 : Facteur commun

Soient a, b et k des nombres réels, on a la factorisation suivante :

$$ka + kb = k(a+b)$$

À retenir : La factorisation c'est mettre ce qui est redondant en facteur, c'est-à-dire en prenant une phrase :

Zakary va chercher du pain, puis Zakary va chercher sa soeur puis Zakary va chercher un colis

Dans cette phrase c'est le groupe de mots *Zakary va chercher* qui est redondant. Pour alléger la phrase en français on dirait plutôt :

Zakary va chercher du pain, puis sa soeur, puis un colis

Exemple :

- $12x-4 = 4\times 3x + 4\times(-1) = 4(3x-1)$
- $9x^2-6x = 3\times 3x^2 + 3\times(-2x) = 3(3x^2-2x)$.
  Ici nous n'avons pas factorisé au maximum, nous pouvons encore factoriser l'un des deux facteurs !
  $9x^2-6x = 3(3x^2-2x) = 3(x\times 3x + x\times(-2)) = 3\times x(3x-2) = \boxed{3x(3x-2)}$
  Nous avons bien factorisé au maximum car nous ne pouvons factoriser aucun des deux facteurs présent.

Information : Le deuxième point de l'exemple on aurait pu tout de suite remarquer que $3x$ était un facteur commun des deux termes de l'expression littéral.

À savoir faire 10 : Factoriser à l'aide d'un facteur commun

1. $16x-4 = 4(4x-1)$
2. $-48+16x = 16(-3+x)$
3. $27x^2+9x = 9x\left(3x^2+1\right)$
4. $x^2y+2x = x(xy+2)$
5. $x^2yz+y^2z^3 = yz\left(x^2+yz^2\right)$

B.2 - Identités remarquables

Propriété 13 : Identités remarquables de factorisation

Soient a et b deux nombres réels, on a les factorisations suivantes :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Point chaud : On remarque que ce sont juste les identités remarquables de développement lu de droite à gauche ! Donc pas de panique il n'y en a pas six à apprendre mais seulement trois à savoir lire dans les sens. Cette faculté de savoir lire les égalités de gauche à droite mais aussi de droite à gauche est une faculté très importante qu'on travaillera tout au long de l'année.

Exemple :

- $4x^2 + 49 + 28x = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 6^2 = (2x+7)^2$
- $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x-3)^2$
- $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x-5)(3x+5)$

À savoir faire 11 : Factoriser à l'aide d'identités remarquables, mais pas que...

1. $4x^2 + 9 - 12x = (2x)^2 + 3^2 - 2 \times 2x \times 3 = (2x-3)^2$
2. $16x^2 - 25 = (4x)^2 - 5^2 = (4x-5)(4x+5)$
3. $9a^3 - 12a^2 + 4a = a\left(9a^2 - 12a + 4\right) = a\left((3a)^2 - 2 \times 3a \times 2 + 2^2\right) = a(3a-2)^2$
4. $(7x+2)^2 - (4x+2)^2 = (7x+2-(4x+2))(7x+2+4x+2) = 3x(11x+4)$

B.3 - Méthode

Pour **factoriser** une expression littéral on peut suivre la méthode suivante :

- **Y a-t-il un facteur commun ?**
  - Si oui, on factorise par le facteur commun ;
  - Sinon, **y a-t-il une identité remarquable ?**
    - Si oui, on factorise via l'identité remarquable ;
    - Sinon, on va "**scinder**" l'étude sur chacun des termes de notre expression.
      On va factoriser à part chaque terme en repartant du début de cette méthode.

  On n'oubliera pas de réduire chaque facteur et de se poser la question :
- **A-t-on factorisé au maximum ?** En faisant l'étude de chaque facteur de notre expression factorisée.

Exemple :

Factorisons l'expression littérale : $A = (2x-1)^2 - (5x+1)(6x-3) + (8x^2-2)$ On suit la méthode énoncée précédement :

- Nous n'avons pas de facteur commun sur l'expression globale ;
- Nous ne repérons aucune identité remarquable de factorisation sur l'expression globale ;
- Nous allons alors scinder l'étude sur chaque terme de l'expression, factorisons chacun des termes :
  - $(2x-1)^2$ est déjà factorisé au maximum car aucun facteur commun ni identité remarquable de factorisation...
  - $(5x+1)(6x-3) = (5x+1)(3 \times 2x + 3 \times (-1)) = (5x+1) \times 3(2x-1) = 3(5x+1)(2x-1)$
  - $2 \times 4x^2 + 2 \times (-1) = 2(4x^2-1) = 2(2^2x^2 - 1^2) = 2\left((2x)^2 - 1^2\right) = 2(2x-1)(2x+1)$

- L'expression à factoriser est alors : $(2x-1)^2 - 3(5x+1)(2x-1) + 2(2x-1)(2x+1)$
  On reprend alors la méthode du début :
  - On a bien un facteur commun : $(2x-1)^2 - 3(5x+1)(2x-1) + 2(2x-1)(2x+1)$.
    On peut alors factoriser l'expression par $2x-1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}(2x-1)\,[2x-1-3(5x+1)+2(2x+1)] &= (2x-1)[2x-1-15x-3+4x+2]\\ &= (2x-1)[-9x-2]\end{aligned}$$

  - **Attention !** N'oublions pas de se poser la question suivante : peut-on encore factoriser un des facteurs ?
    Ici c'est le cas, $2x-1$ est factorisé au maximum, mais $-9x-2$ est factorisable par -1.
    - En effet : $-9x-2 = -1\times 9x + (-1)\times 2 = -1(9x+2) = -(9x+2)$

  Ainsi nous avons $\boxed{A = -(2x-1)(9x+2)}$ qui est l'expression factorisé au maximum de A.

À savoir faire 12 : Factoriser à l'aide de la méthode

$2(x-2)(x+1)+(x^2-4)-3(1-x)(4-2x)$

$$\begin{aligned}&= 2(x-2)(x+1)+(x-2)(x+2)-3(1-x)\times(-2)(x-2)\\ &= (x-2)\,(2(x+1)+x+2+6(1-x))\\ &= (x-2)(2x+2+x+2+6-6x)\\ &= (x-2)(-3x+10)\end{aligned}$$

Partie III Exercices

A - Fractions

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 1** (Simplification de fractions)

Simplifier au maximum les fractions suivantes :

1. $\frac{30}{40}$
2. $\frac{12}{36}$
3. $\frac{8}{20}$
4. $\frac{21}{56}$
5. $\frac{27}{72}$
6. $\frac{15}{55}$

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 2** (Somme de fractions)

Déterminer chacune des sommes suivantes :

1. $1+\frac{2}{3}$
2. $1+\frac{3}{7}$
3. $3+\frac{3}{4}$
4. $1-\frac{2}{5}$
5. $1-\frac{5}{7}$
6. $\frac{2}{3}+\frac{5}{9}$
7. $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$
8. $\frac{3}{7}-\frac{1}{2}$
9. $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$
10. $\frac{5}{6}+\frac{4}{9}$

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 3** (Produit de fractions)

Déterminer chacun des produits suivants :

1. $5\times\frac{3}{5}$
2. $4\times\frac{7}{12}$
3. $6\times\frac{5}{24}$
4. $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$
5. $\frac{3}{4}\times\frac{7}{3}$
6. $\frac{16}{5}\times\frac{3}{8}$
7. $\frac{12}{25}\times\frac{10}{9}$

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 4** (Division de fraction)

Déterminer chacun des quotients suivants :

1. $\frac{2}{7}\div\frac{3}{5}$
2. $\dfrac{-\frac{5}{4}}{\frac{9}{-11}}$

★★☆☆☆ **EXERCICE 5** (Mélange #1)

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

1. $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{7}{9}$
2. $\frac{7}{12}-\frac{5}{12}\times\frac{9}{10}$
3. $-\frac{7}{8}\div\left(\frac{2}{3}-1\right)$
4. $\frac{9}{2}-\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{15}{8}}$

★★★☆☆ **EXERCICE 6** (Mélange #2)

Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

1. $\left(\frac{18}{24}\div\frac{9}{16}\right)+\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}$
2. $\dfrac{\frac{40}{60}+\frac{25}{45}}{\frac{5}{6}-\frac{3}{8}}$

3. $\left(\frac{30}{42}-\frac{15}{28}\right)\div\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{7}\right)$

4. $\frac{21}{35}\div\left(\frac{7}{15}+\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{9}$

5. $\left(\frac{36}{90}\times\frac{12}{30}\right)+\frac{\frac{5}{9}}{\frac{7}{8}}$

6. $\left(\frac{25}{50}+\frac{10}{40}\right)\times\left(\frac{3}{5}\div\frac{7}{9}\right)$

B - Puissances

★★⯪☆☆ **Exercice 7** (Puissance de 10)

Écrire sous la forme d'une puissance de 10.

1. $2\times10^2\times5$
2. $25\times10^3\times4$
3. $20\times100^2\times50$
4. $(2,5\times0,4)^2\times\left(10^2\right)^3$
5. $\frac{10^7\times\left(10^3\right)^2}{10^{-4}}$
6. $\frac{10^{-5}\times\left(10^{-4}\right)^{-2}}{10^{13}}$

★★★☆☆ **Exercice 8** (Manipulation des puissances)

Soient a et b deux nombres réels. On ne souciera pas du domaine de validité des expressions suivantes.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $a^{12}\times a^{-15}$
2. $\frac{a^6}{a^{-1}}$
3. $\frac{(ab)^3}{a^2}$
4. $\frac{a^{-2}}{a^5}$
5. $\frac{a^7\times\left(a^9\right)^3}{a^5\times a^2}$
6. $\frac{(3a)^2\times5a^3}{a^7}$
7. $\frac{\pi^7\times2^6}{(4\pi)^3}$

★★★☆☆ **Exercice 9** (Puissance de 3)

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 3.

1. $\frac{3^4\times9^2}{3^5}$
2. $\frac{6^8\times3^7}{4^4\times3^{-3}}$
3. $\frac{6^{-3}\times3^{-2}}{8^{-1}\times3^5}$

★★★☆☆ **Exercice 10** (Puissance de 2 et 3)

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n\times3^p$, où n et p sont des entiers relatifs.

1. $12\times9^7\times18^{-5}$
2. $16^{-1}\times27^{-2}\times6^7$

★★★☆☆ **Exercice 11** (Quelle puissance?)

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance d'un nombre à déterminer.

1. $22^6\times\frac{33^3}{8\times6^3}$
2. $49\times4^3\times\frac{\left(\frac{63}{8}\right)^3}{8\times3^6}$

C - Racines carrées

★★☆☆☆ **Exercice 12** (Simplification #1)

Simplifier au maximum les racines carrées suivantes :

1. $\sqrt{12}$
2. $\sqrt{\dfrac{2}{8}}$
3. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{27}}$
4. $\sqrt{150}$
5. $\sqrt{176}$
6. $\sqrt{300}$
7. $\sqrt{147}$
8. $\sqrt{448}$

★★★⯪☆ **EXERCICE 13** (Simplification #2) ....

Simplifier au maximum les racines carrées suivantes :

1. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$
2. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{27}}$
3. $\dfrac{\sqrt{27}\times\sqrt{8}}{\sqrt{24}}$
4. $\left(2\sqrt{5}\right)^2$
5. $\left(\sqrt{7}\right)^4$
6. $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$
7. $\sqrt{\dfrac{9}{10}}\,\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{81}}$
8. $\dfrac{3\sqrt{2}\times\sqrt{8}\times2\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{35}{56}}}$

★★★☆☆ **EXERCICE 14** (Simplification #3) ....

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ (si possible) ou $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ avec a, b, c et d des nombres entiers.

1. $\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$
2. $2\sqrt{12}-4\sqrt{75}+3\sqrt{27}$
3. $5\sqrt{3}-5\sqrt{28}-\sqrt{7}$

★★★★⯪ **EXERCICE 15** (Que de radicaux!) ....

1. Calculer, en donnant le résultat sous la forme d'un entier :

   (a) $\sqrt{44+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}$

   (b) $\sqrt{\sqrt{10^2-8^2}+4\sqrt{5^2-3^2}+2\sqrt{\dfrac{9}{4}}}$

2. Soit a un nombre réel strictement positif. Simplifier l'expression :

$$\sqrt{a^2\sqrt{a^4\sqrt{a^8\sqrt{a^{16}}}}}$$

★★★★★ **EXERCICE 16** (Avec des puissances) ....

Soit n un entier positif. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sqrt{2^{2n-4}\times5^{2n+6}}$
2. $\sqrt{\dfrac{2^{8n}}{5^{4n+2}}}$
3. $\sqrt{\dfrac{3^{4n}}{9^{2-6n}}}\times\dfrac{1}{\sqrt{81^n}}$
4. $\sqrt{\dfrac{25^{2n}}{4^{6n-4}}}\times\dfrac{\sqrt{64^n}}{\sqrt{125^{2n+2}}}$

D - Développement

★★☆☆☆ **EXERCICE 17** (Développement #1) ....

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1. $3(5x+8)$
2. $4x(6x-9)$
3. $-7(4x-1)$
4. $-9x(4x+7)$
5. $(x+2)(6x+7)$
6. $(8x-1)(3x+4)$
7. $(9x-2)(7x-8)$
8. $(5x+9)^2$
9. $(3x-7)^2$
10. $-(2x-3)^2$
11. $(8x-9)(8x+9)$
12. $(9+5x)(-9+5x)$

★★⯪☆☆ **EXERCICE 18** (Avec des racines carrées) ....

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes :

1. $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$
2. $\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)^2$
3. $\left(\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2$
4. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$
5. $\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)^2$

★★★⯪☆ **EXERCICE 19** (Développement #2) . . . .

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1. $(3x+8)^2+(2x-7)^2$
2. $(7x-6)(7x+6)-(4x+3)^2$
3. $(7x+5)^2+(4x-1)(3x-8)$
4. $(4x-3)^2-2(x+1)$
5. $(6x+1)^2-(x+2)^2$
6. $(5x+6)^2-(3x-1)^2$

★★★★★ **EXERCICE 20** (Rigueur) . . . .

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1. $4x+x\,[3-x(7-x)]-2x\,[4x-(x-2)]$
2. $5(3x-1)(2x+3)-3(2x+3)(5-3x)+2x+3$
3. $(2x-3)(2x+3)-(x+5)(x-5)$
4. $(2x+1)(2x-1)-3(x-5)^2$

E - Factorisation

★★⯪☆☆ **EXERCICE 21** (Factorisation #1) . . . .

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

1. $14x-21$
2. $32x+8$
3. $13x^2-9x$
4. $3x^2+12x$
5. x^2-6x+9
6. $x^2-16x+64$
7. $81x^2+36x+4$
8. $4x^2+28x+49$
9. $3x^2-24x+48$
10. $4-25x^2$
11. $100x^2-81$
12. $64x^2-49$

★★★★☆ **EXERCICE 22** (Factorisation #2) . . . .

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

1. $(2x+5)(7x-3)+(6x+4)(2x+5)$
2. $(x+7)(3x-8)-(2x+1)(3x-8)$
3. $(2x+5)^2+(2x+5)(3x-9)$
4. $(9x-4)(5x+6)-(9x-4)(3x+11)$
5. $(3x-7)^2-16$
6. $25x^2-(x+2)^2$
7. $(6x-5)^2-(4x-3)^2$
8. $(7x-3)^2-(7x-3)(4x+6)$
9. $4x^2-28x+49+(5x-3)(2x-7)$
10. $25x^2-16-(2x+3)(5x-4)$
11. $(5x-8)^2+10x-16$
12. $(7x+5)(3x-4)-7x-5$
13. $9x^2-24x+16-(2x+1)^2$
14. $7x^3+14x^2+21x$
15. $x^2y-xy^2+2x^2y^2$
16. $49a^2-70ab+25b^2$
17. $121x^2-49a^2b^2$

★★★★⯪ **EXERCICE 23** (Factorisation #3) . . . .

1. $(2x-1)^2-(5x+1)(6x-3)+(8x^2-2)$
2. $2(x-2)(x+1)+(x^2-4)-3(1-x)(4-2x)$
3. $2x^2-2+5(x-1)^2-20$
4. $2x^2-2+5(x-1)^2-20$

★★★☆☆ **EXERCICE 24** (Calcul) . . . .

Sans calculatrice, calculer $10\,001^2-9\,999^2$

★★★★★ **EXERCICE 25** (Pour finir...) ....

1. En oubliant pas que $3 = 4 - 1$, factoriser au maximum l'expression suivante :

$$x^2 - 4x + 3$$

2. Factoriser l'expression suivante, en produit de facteurs de degré 1.

$$x^3 + x^2 - 4x - 4$$