Chapitre 3

Équations et inéquations

Plan du chapitre

Introduction

Dans ce chapitre, nous apprendrons à résoudre différents types d'équations et d'inéquations en utilisant des méthodes simples et rigoureuses. Nous verrons aussi comment utiliser les tableaux de signes pour étudier des expressions et en déduire des solutions.

Partie I Équations

A - Généralités

Définition 1 : Résoudre une équation

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vraie. L'ensemble de ces valeurs constituent l'**ensemble des solutions** de l'équation.

Exemple :

En clair, pour résoudre l'équation $x+1=2$ il ne suffit pas d'affirmer que 1 est solution de cette équation (en effet, on a bien : $1+1=2$), il faut également justifier que tous les autres nombres réels ne sont pas solutions des solutions de notre équation.
Pour cela on va chercher à ce ramener à des équations qu'on nommera **triviale**, par exemple : $x=1$ en est une. Ici il est évident que seul 1 est solution de notre équation.
Voyons comment passer de notre équation $x+1=2$ à une équation triviale.

Définition 2 : Équations équivalentes

Deux équations sont équivalentes si elles ont même ensemble des solutions.

Exemple :

Nous venons de voir que l'ensemble des solutions de l'équation $x+1=2$ est $S=\{1\}$, on montre sans difficulté que l'ensemble des solutions de l'équation $x=1$ est $S'=\{1\}$. Ainsi comme $S=S'$, on peut dire que les équations $x+1=2$ et $x=1$ sont équivalentes, on notera :

$$x+1=2 \Leftrightarrow x=1$$

Propriété 1 : Obtention d'équation équivalente

- On obtient une équation équivalente lorsqu'on **ajoute ou soustrait** un même nombre aux deux membres d'une équation;
- On obtient une équation équivalente lorsqu'on **multiplie ou divise** les deux membres d'une équation par un même nombre non nul.

Exemple :

Pour résoudre $3x+7=21$:

$$\begin{aligned} 3x+7=21 &\Leftrightarrow 3x=21-7 \\ &\Leftrightarrow 3x=14 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{14}{3} \end{aligned}$$

Cette succession d'équivalence nous permet d'assurer que l'ensemble des solutions de l'équation souhai-

tée : $3x+7=21$ est le même que l'ensemble des solutions de l'équation : $x=\frac{14}{3}$. Cette dernière est une équation **triviale** (évidente) à partir de laquelle on peut immédiatement conclure que l'ensemble des solutions est : $S=\left\{\frac{14}{3}\right\}$.
Ainsi l'ensemble des solutions de notre équation de départ est : $S=\left\{\frac{14}{3}\right\}$.

À retenir : La méthode sera toujour d'utiliser les propriétés pour conserver des équations équivalentes afin d'obtenir une équation dîte triviale, c'est-à-dire de la forme : $x=\ldots$ (et rien d'autre). Ces équations (et uniquement elles) nous permettent de conclure directement sur l'ensemble des solutions de notre équation souhaitée.

À savoir faire 1 : Résoudre une équation de degré 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $2x-5=0$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. $-4x+3=11$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. $-3x-1=7x+20$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. $\frac{5x+2}{8}=x-2$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

....

....

....

B - Équations produit nul

Théorème 1 : Produit nul

Un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, c'est-à-dire :

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Exemple :

- Résoudre $(x-15)(2x+5) = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

- Résoudre $4x^2 + 12x + 9 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

Information : Ordre supérieur

Le théorème précédent nous ouvre les portes de certaines équations d'ordre supérieur à 1. En effet à l'aide de la factorisation on peut se ramener à un produit d'expression d'ordre un, ensuite par le théorème nous n'avons plus qu'à résoudre des équations d'ordre 1.

À savoir faire 2 : Résoudre des équations d'ordre supérieur à 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 8x + 16 = 0$

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

2. $4x^2 + 49 = 28x$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. $9x^2 - 81 = 0$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

À retenir : Lorsque vous avez une équation d'un degré supérieur à 1, il faut tout faire pour se ramener à une équation produit nul :

- Obtenir le second membre de l'équation égal à 0
  On a alors : **équation** produit **nul** ;
- Gagnons le produit en factorisant ! On va chercher à factoriser le membre de gauche (non nul) pour finalement obtenir une **équation produit nul**.

C - Équations quotient

Certaines équations nécessitent des contraintes sur les variables.
Par exemple, si on cherche une longueur, la solution ne peut être que positive ou nulle. De la même manière certaines opérations ne sont pas définies pour toutes les valeurs réelles.

Théorème 2 : Équation quotient

La division par zéro n'étant pas définie ;
Le réel x_0 est solution de l'équation :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x)$$

si, et seulement si, $Q(x_0) \neq 0$ et $P(x_0) = Q(x_0)T(x_0)$

Exemple :

Montrer que $5 - \sqrt{6}$ est solution de l'équation : $\frac{x-1}{x-3} = x - 6$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

....
....
....
....
....

Corollaire 1 :

Une fraction $\frac{A}{B}$ est égale à un réel k si, et seulement si, $B \neq 0$ et $A = kB$. C'est-à-dire :

$$\frac{A}{B} = k \Leftrightarrow B \neq 0 \ \textbf{ et } \ A = kB$$

À retenir : Dans une équation quotient la première chose à faire c'est de vérifier que cette équation a un sens, c'est-à-dire déterminer pour quelles valeurs le dénominateur est non nul. Puis on vérifie que le numérateur est le produit du dénominateur par le membre de droite.

Exemple :

Montrer que $\frac{7}{2}$ est solution de l'équation $\frac{x-1}{x-3} = 5$

....
....
....
....
....
....

À savoir faire 3 : Résoudre des équations quotient

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{2x-5}{3x+7} = 4$

....
....
....
....
....
....
....

2. $\frac{2x-5}{3x+7} = x + 3$

....
....
....
....
....
....

. . . .

. . . .

3. $\frac{24}{x^2+9} = 4$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Partie II Inéquations

A - Généralités

Définition 3 : Résoudre une inéquation

Résoudre une inéquation d'inconnue x, c'est déterminer <u>toutes</u> les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vraie. L'ensemble de ces valeurs constituent l'**ensemble des solutions** de l'inéquation.

Exemple :

De la même façon que pour les équations, pour résoudre l'inéquation $x+1>2$ il ne suffit pas d'affirmer que $]1,+\infty[$ comme solution. Il faut également justifier que tous les autres nombres réels ne sont pas solutions de notre inéquation.
Pour cela on va chercher à ce ramener à des inéquations qu'on nommera **triviales**, par exemple : $x>1$ en est une. Ici il est évident que seul $]1,+\infty[$ est solution de notre inéquation.
Voyons comment passer de notre inéquation $x+1>2$ à une inéquation triviale.

Définition 4 : Inéquations équivalentes

Deux inéquations sont équivalentes si elles ont même ensemble des solutions.

Exemple :

Nous venons de voir que l'ensemble des solutions de l'inéquation $x+1>2$ est $S=]1,+\infty[$, de même on montre sans difficulté que l'ensemble des solutions de l'inéquation $x>1$ est $S'=]1,+\infty[$.
Ainsi comme $S=S'$, on peut dire que les inéquations $x+1>2$ et $x>1$ sont équivalentes, on notera :

$$x+1>2 \Leftrightarrow x>1$$

Propriété 2 : Obtention d'inéquation équivalente

- On obtient une inéquation équivalente lorsqu'on **ajoute ou soustrait** un même nombre aux deux membres d'une inéquation.
- On obtient une inéquation équivalente lorsqu'on **multiplie ou divise** les deux membres d'une inéquations par un même nombre strictement postif.

- On obtient une inéquation équivalente lorsqu'on **multiplie ou divise** les deux membres d'une inéquations par un même nombre strictement négatif **et** que l'on **change le sens** de l'inégalité. En d'autres termes, pour $k < 0$:
$$P(x) > Q(x) \Leftrightarrow kP(x) < kQ(x)$$

Exemple :

Pour résoudre l'inéquation $3x + 7 > 21$:

$$\begin{aligned} 3x + 7 > 21 &\Leftrightarrow 3x > 21 - 7 \\ &\Leftrightarrow 3x > 14 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{14}{3} \quad \text{car } 3 > 0 \end{aligned}$$

Cette succession d'équivalence nous permet d'assurer que l'ensemble des solutions de notre inéquation est le même que celui de l'inéquation : $x > \frac{14}{3}$. Cette dernière est une inéquation **triviale** à partir de laquelle on peut immédiatement conclure que l'ensemble des solutions est : $S = \left]\frac{14}{3}, +\infty\right[$
Ainsi l'ensemble des solutions de notre inéquation de départ est : $S = \left]\frac{14}{3}, +\infty\right[$.

À retenir : La méthode pour résoudre une inéquation est la même que pour une équation, on utilise les différentes propriétés pour obtenir des inéquations équivalentes et aboutir à une inéquation triviale.

À savoir faire 4 : Résoudre une inéquation de degré 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $3x - 1 > 0$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. $-2x + 8 \leq 1$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. $-5x - 3 \geq 9x + 13$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

....

....

....

4. $\frac{2-x}{4} < x+5$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

B - Tableau de signes d'une expression

On considère deux réels a et b tels que $a < b$ et une expression $A(x)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ telle que :

$$A(x) > 0 \text{ pour tout } x < a \text{ et } A(x) > 0 \text{ pour tout } x > a \text{ et } A(a) = 0.$$

On centralise toutes ces informations dans le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
Signe de $A(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	

Information : Conventions

- Quand l'expression est strictement positive (respectivement négative) sur un intervalle de réels, on met le signe + (respectivement -) dans la zone à la verticale de l'intervalle.
- Quand l'expression s'annule pour un nombre réel a, on met un 0 à la verticale de a.
- Quand l'expression n'est pas définie en une valeur b (par exemple $\frac{1}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$) on trace une double barre à la verticale de la valeur b. On dit que b est une valeur **interdite** pour $A(x)$.

Le tableau de signes est d'une grande d'aide pour résoudre une inéquation car nous avons dans un chapitre précédent que $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$. Ainsi pour résoudre une inéquation il sera très souvent utile d'étudier le signe d'une expression.

C - Inéquations produit / quotient

Théorème 3 : Règle des signe

- Le **produit** de deux facteurs (ou **quotient** de deux termes) non nuls est **positif** si, et seulement si, les deux facteurs (ou termes) sont de **même signe**.
- Le **produit** de deux facteurs (ou **quotient** de deux termes) non nuls est **négatif** si, et seulement si, les deux facteurs (ou termes) sont de **signe contraire**.

Exemple :

1. Étudier le signe de $A(x) = -2(-2x+3)(2x-7)$ sur $\mathbb{R}$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-2x+3$			
Signe de $2x-7$			
Signe de -2			
Signe de $A(x)$			

2. Résoudre l'inéquation : $-2(-2x+3)(2x-7) \geq 0$

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Résoudre l'inéquation : $-2(-2x+3)(2x-7) < 0$

   ....

   ....

   ....

À savoir faire 5 : Résoudre une inéquation produit/ quotient

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{2x+3}{-3-5x} \leq 0$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

....

....

....

2. $3x^2 < 12$

....

....

....

....

....

....

Partie III Exercices

A - Équations

★★⯪☆☆ **EXERCICE 1** (Équations équivalentes ?)

Dans chaque cas, dites si les équations (E) et (E') sont équivalentes ou pas.

1. $(E): 2x+3=-6$ et $(E'): 4x+6=-12$
2. $(E): 2x-5=0$ et $(E'): 10-4x=0$
3. $(E): 3x+18=25$ et $(E'): 7=3x$
4. $(E): 7x-14=2$ et $(E'): x-2=2$
5. $(E): x+4+3x=18$ et $(E'): x+1=9$
6. $(E): 2x+9+2x=4x-25$ et $(E'): 4x+9=-25$

★★★☆☆ **EXERCICE 2** (Premier degré)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{x-1}{7}=x-1$
2. $2x+4=5x-7$
3. $3x+6=x+6$
4. $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{5-2x}{3}$
5. $x=\dfrac{x}{2}+8$
6. $x=\dfrac{x+8}{2}$

★★★⯪☆ **EXERCICE 3** (Équation produit nul)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $(x-1)(2x+3)=0$
2. $(6x+3)(7x-2)=7x-2$
3. $2(5x-1)(x+2)=(5x-1)(3-x)$
4. $x^2-14x+49=0$
5. $4x^2-4x+1=0$
6. $25x^2+30x+9=0$
7. $16x^2+1=8x$
8. $x^2-49=0$
9. $4x^2=16$

★★★★☆ **EXERCICE 4** (Factorisation)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

1. $(2x-3)(5x+7)+(x+5)(2x-3)=0$
2. $(6x+7)(2x+3)+(6x+7)(2x-3)=0$
3. $2x^2+5x+8=8$
4. $(4x-8)(5x-1)=(x-2)(6x+3)$
5. $x^3+2x^2=4x^2(x+1)$
6. $\dfrac{(4x-5)(3x+2)}{7}=(4x-5)(3x+2)$

★★★⯪☆ **EXERCICE 5** (Choix de l'expression)

On considère l'expression $Q(x)=x^4+6x^2-40$

1. Vérifier que : $Q(x)=(x^2-4)(x^2+10)$
2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:
   (a) $Q(x)=0$
   (b) $Q(x)+40=0$
   (c) $Q(x)+65=(x+5)^2-10x$

★★★★☆ **EXERCICE 6** (Équation quotient) ....

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{4x-6}{x-2}=0$
2. $\dfrac{4x^2+4x+1}{x+2}=0$
3. $\dfrac{(5+x)(8+2x)}{2x-1}=0$
4. $\dfrac{9x^2-121}{9x^2+121}=0$
5. $\dfrac{4x-6}{x-2}=4x-6$
6. $\dfrac{6x-2}{x+2}=3x-1$
7. $\dfrac{3}{x+5}=\dfrac{5}{x+3}$
8. $\dfrac{4}{x-6}=\dfrac{7}{x-1}$
9. $\dfrac{8}{x^2-1}=\dfrac{7}{x-1}$

★★★★★ **EXERCICE 7** (Modélisation d'un problème) ....

Soit ABC un triangle dont les longueurs sont : $AB=3, BC=5$ et $AC=4$.
On considère un point M du segment $[AB]$ vérifiant $MB=x$.
La perpendiculaire à (BC) passant par M coupe $[BC]$ en N.
La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en P.
Le point O est le point de $[BC]$ tel que $MNOP$ soit un rectangle.

1. Justifier que $x\in[0,3]$.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et calculer son aire.
3. Exprimer la longueur MP en fonction de x.
4. Montrer que la longueur MN, en fonction de x, est $\dfrac{4x}{5}$.
5. En déduire l'expression de l'aire de $MNOP$ en fonction de x.
6. On veut savoir si l'aire du rectangle peut faire exactement la moitié de l'aire du triangle.
   Modéliser ce problème sous la forme d'une équation vérifiée par x dans un tel cas.
7. Résoudre alors cette équation et conclure dans le contexte de l'exercice.

B - Inéquations

★★☆☆☆ **EXERCICE 8** (Solutions ?) ....

Parmi les inéquations suivantes, lesquelles admettent 9 une solution :

1. $-3x+2\geq 0$
2. $\dfrac{x+1}{4}\geq -3\times\dfrac{x-2}{3}$
3. $5(x-9)>0$
4. $2>x$

★★⯪☆☆ **EXERCICE 9** (Résolution) ....

1. $-3x+7\leq x+2$
2. $-6x+1>0$
3. $-3x+7\leq x+2$
4. $-\dfrac{x}{4}<5$
5. $-3(x+5)<x+5$
6. $-3x+7\leq 9-x$
7. $\dfrac{x-1}{6}+\dfrac{x+1}{3}<2$
8. $x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{6}\leq\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x-3}{6}$

C - Tableaux de signes

★★★☆☆ **EXERCICE 10** (Tableau de signes # 1) ....

Dresser le tableau de signes des expressions algébriques suivantes :

1. $(x+1)(x-2)$
2. $-(2x+4)(x-2)$
3. $(x+1)^2$

★★★☆☆ **EXERCICE 11** (Tableau de signes # 2) ....

Compléter les tableaux de signes ci-dessous

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x+1$	
$3+x$	
$(2x+1)(3+x)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$2-x$	
$4x-3$	
$(2-x)(4x-3)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$2+x$	
$2-x$	
$\frac{2+x}{2-x}$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$4x+1$	
$x-1$	
x	
$\frac{(4x+1)(x-1)}{x}$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$1-x$	
$2x+1$	
$(1-x)(2x+1)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$x-3$	
$4-2x$	
$(x-3)(4-2x)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$x-1$	
$-2x-8$	
$\frac{x+5}{-2x-8}$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$4-x$	
$x-1$	
$-x-1$	
$\frac{(4-x)(x-1)}{-x-1}$	

D - Inéquations et tableaux de signes

★★★★☆ **Exercice 12** (À l'aide d'un tableau de signes)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x+1)^2 > 0$
2. $(x+1)^2 \geq 0$
3. $(x+1)^2 < 0$
4. $x^2+1 \leq 0$
5. $x^2-4 < (x+2)^2$
6. $(x+1)^2-(x-1)^2 \geq 0$
7. $(x+4)(1-2x) \geq 0$
8. $\dfrac{x^2-1}{x+2} < 0$
9. $(x+1)(1-x) > (2x-1)(x+1)$
10. $x^3-x \leq 0$
11. $(x+1)^2-(x+1)(2-x) \geq 0$
12. $\dfrac{x+1}{x-1} < -1$

★★★⯪☆ **Exercice 13** (Inéquation quotient)

1. Résoudre l'inéquation : $(2x-1)(3-x) \geq (2x-1)(5x+1)$
2. (a) Montrer que : $\dfrac{3x-6}{2x+3} - \dfrac{4-7x}{2x-2} = \dfrac{5x(4x-1)}{(2x-2)(2x+3)}$

   (b) En déduire l'ensemble de solution de l'inéquation : $\dfrac{3x-6}{2x+3} < \dfrac{4-7x}{2x-2}$

★★★★⯪ **Exercice 14** (Pour finir)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{1-x} < \dfrac{1}{1+x}$
2. $\dfrac{-(2x+1)^2}{(4x-3)(1-2x)} \leq 0$
3. $\dfrac{3x-2}{6} + \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{4} + \dfrac{5x}{2}$
4. $(3x-4)(5-2x) \geq (4x-10)(2-3x)$
5. $\dfrac{5x+1}{2x-1} + \dfrac{3x+3}{x+1} \geq 0$
6. $\dfrac{2x-4}{4x+1} \leq \dfrac{3x+5}{6x}$
7. $\dfrac{x^2-5}{2x^2+2\sqrt{3}x+1} \leq 0$