

---

# Variables aléatoires discrètes

---

## Plan du chapitre

---

<b>I Un premier exemple</b> .....	<b>2</b>
<b>II Définitions</b> .....	<b>2</b>
A - Définition.....	2
B - Loi d'une variable aléatoire .....	3
<b>III Espérance et variance d'une variable aléatoire</b> .....	<b>7</b>
A - Espérance .....	7
B - Variance .....	9
C - Transformation affine.....	11
D - Bonus : variables aléatoires connues.....	12
<b>IV Exercices</b> .....	<b>13</b>
A - Problème de synthèse.....	13

---

## Partie I Un premier exemple

On considère l'expérience aléatoire d'un lancer de dé équilibré à six faces. On a alors  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$  l'univers des possibles de notre expérience aléatoires.

On définit trois événements :

- ▶  $A$  : « le résultat obtenu est 6 »;
- ▶  $B$  : « le résultat obtenu est pair et différent de 6 »;
- ▶  $C$  : « le résultat obtenu est impair ».

Donc :

- ▶ l'événement  $A$  est réalisé par : l'issue 6, ainsi  $A = \{6\}$  et on a alors :  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$ ;
- ▶ l'événement  $B$  est réalisé par : les issues 2 et 4, ainsi  $B = \{2, 4\}$  et on a alors :  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ ;
- ▶ l'événement  $C$  est réalisé par : les issues 1, 3 et 5, ainsi  $C = \{1, 3, 5\}$  et on a alors :  $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ .

On décide d'établir la règle suivante :

- Si  $A$  est réalisé alors le joueur gagne 2€;
- Si  $B$  est réalisé alors le joueur ne gagne rien et ne perd rien;
- Si  $C$  est réalisé alors le joueur perd 1€.

Nous désignons par  $X$  le gain algébrique (c'est-à-dire positif ou négatif) du joueur et par  $X(\Omega)$  l'ensemble des valeurs possibles de  $X$ , on a alors :  $X(\Omega) = \{-1, 0, 2\}$ .

On peut établir le tableau suivant, entre les issues et les valeurs des gains :

Issue	1	2	3	4	5	6
Valeur de $X$	-1	0	-1	0	-1	2

On remarque que l'événement  $(X = 2)$  est le même que l'événement  $A$ . De même, l'événement  $(X = 0)$  avec l'événement  $B$  et  $(X = -1)$  avec  $C$ .

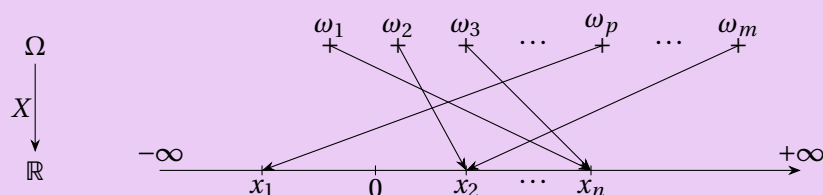
## Partie II Définitions

### A - Définition

#### Définition 1 : Variable aléatoire

Soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un ensemble fini d'issues possibles d'une expérience aléatoire.

Une **variable aléatoire** finie, notée  $X$ , est une **fonction** définie sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (plus précisément un sous ensemble fini de  $\mathbb{R}$ ).



Nous noterons  $X(\Omega)$  (l'image de  $\Omega$  par  $X$ ) l'ensemble des valeurs prises par la fonction  $X$ , que l'on nommera **support** de  $X$ .

**Définition 2 : Événement**

Pour  $X$  une variable aléatoire telle que :  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

On a alors pour tout  $x_i \in X(\Omega)$ , nous noterons  $(X = x_i)$  l'événement défini comme étant l'ensemble des issues  $\omega \in \Omega$  telles que  $X(\omega) = x_i$ , c'est-à-dire :

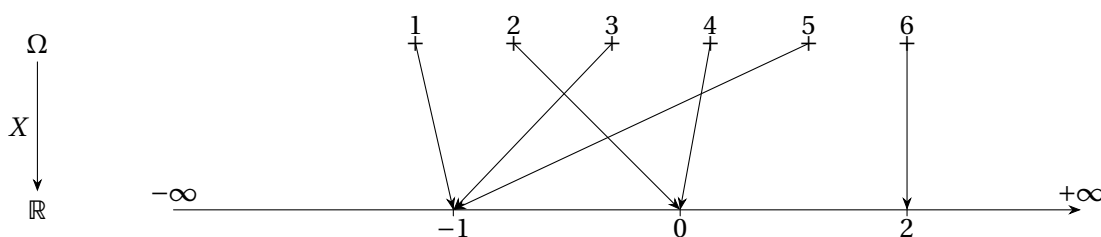
$$(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$$

**Exemple :**

D'après l'exemple traité précédemment on a :

$$X: \llbracket 1, 6 \rrbracket \rightarrow \{-1, 0, 2\}$$

tel que :



Ainsi :  $(X = -1) = \{1, 3, 5\}$ ,  $(X = 0) = \{2, 4\}$  et  $(X = 2) = \{6\}$ .

**Information :**

- Le terme de variable aléatoire peut paraître mal choisi étant donné qu'une variable aléatoire est une fonction, donc elle n'a rien de variable. Mais ce terme vient du vocabulaire des probabilistes et des statisticiens, qui parlaient de « quantités variables ». Et plutôt que d'utiliser « fonction variable » ils ont préféré utiliser « variable aléatoire » pour souligner l'idée qu'on observe une valeur numérique qui varie en fonction du hasard ;
- Pour  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  les événements  $(X = x_i)$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  forment une partition de l'univers  $\Omega$  ;
- Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on définit l'événement  $(X \geq a)$  par :

$$(X \geq a) = \bigcup_{\{k \in X(\Omega) / k \geq a\}} (X = k)$$

Dans l'exemple précédent on a :

$$(X \geq 0) = (X = 0) \cup (X = 2)$$

**B - Loi d'une variable aléatoire**

**Définition 3 : Loi d'une variable aléatoire**

Soit  $\Omega$  un univers fini et  $X$  une variable aléatoire sur  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire  $X$  est la fonction  $\mathbb{P}$  défini sur  $X(\Omega)$  et à valeur dans  $[0, 1]$ , qui à chaque  $x_i \in X(\Omega)$  lui associe la probabilité que la variable prenne cette valeur :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}: X(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ x_i &\longmapsto \mathbb{P}(X = x_i) \end{aligned}$$

**Exemple :**

D'après l'exemple traité précédemment on a la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  par le tableau suivant :

$x_i$	-1	0	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

### ✂ À savoir faire 1 : Variable aléatoire et loi

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et l'on note après chaque lancer le côté obtenu.

1. Représenter à l'aide d'un arbre l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire.

Une issue est un triplet comme  $(P, F, F)$ .

2. Combien y-t-il d'issues dans l'univers  $\Omega$  de cette expérience aléatoire?

.....  
 .....  
 .....

3. Quelle loi de probabilité peut-on définir sur  $\Omega$ ?

.....  
 .....  
 .....

4. Calculer les probabilités des événements suivants :

(a) « Obtenir exactement un Pile »

.....  
 .....  
 .....

(b) « Obtenir au moins un Pile »

.....  
 .....

5. On définit à partir de cette expérience aléatoire un jeu qui consiste à gagner 1€ pour chaque face sorti et à perdre 1,1€ pour chaque pile sorti.

On définit la variable aléatoire  $G$  qui associe à chaque issue de l'expérience aléatoire le gain du joueur.

(a) Déterminer la valeur de  $G$  si le joueur obtient comme tirage :  $(F, P, F)$ .

(b) Déterminer toutes les issues de l'expérience aléatoire telles que  $G = 0,9$ .

(c) En déduire  $\mathbb{P}(G = 0,9)$ .

6. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire  $G$ .

7. Pour chaque valeur  $v$  prise par la variable aléatoire  $G$ , déterminer  $\mathbb{P}(G = v)$ .

On dira qu'on a déterminé la loi de la variable aléatoire  $G$ .

**Propriété 1 : Somme**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur l'univers fini  $\Omega$  d'une expérience aléatoire muni d'une loi de probabilité  $\mathbb{P}$  et de support  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . On a alors :

$$\mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \dots + \mathbb{P}(X = x_n) = 1$$

**Démonstration :**

Cela vient du fait que les événements  $(X = x_i)$  pour  $1 \leq i \leq n$  forment une partition de l'univers  $\Omega$ , en effet :

- Pour tout entier  $1 \leq i \leq n$  :  $(X = x_i) \neq \emptyset$  (événements non impossibles) ;



## Partie III Espérance et variance d'une variable aléatoire

### A - Espérance

#### Définition 5 : Espérance

Soit  $X$  une variable aléatoire, tel que  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , de loi de probabilité  $\mathbb{P}$ .  
L'**espérance** de la variable aléatoire  $X$ , notée  $\mathbb{E}(X)$ , est le réel défini par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= x_1\mathbb{P}(X = x_1) + x_2\mathbb{P}(X = x_2) + \dots + x_n\mathbb{P}(X = x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i\mathbb{P}(X = x_i)\end{aligned}$$

#### 🔗 À retenir : Comment interpréter l'espérance?

Nous interprétons le réel  $\mathbb{E}(X)$  comme étant la moyenne des nombres  $x_i$ , pondéré par les probabilités  $\mathbb{P}(X = x_i)$ .  
L'espérance est l'équivalent en probabilité de ce qu'est la moyenne d'une série statistique.

Dans le cas d'un jeu avec des gains algébriques, elle représente l'espérance de gain d'un joueur.

#### Exemple :

En conservant la même exemple que depuis le départ, on a que le joueur peut gagner 2€, ne rien gagner et ne rien perdre mais aussi peut perdre 1€.

On a donné précédemment la loi de la variable aléatoire  $X$  donnant le gain algébrique du joueur.

$x_i$	-1	0	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi l'espérance de la variable  $X$ , qui représente l'espérance de gain du joueur, est :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 2\mathbb{P}(X = 2) + 0\mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = -1) \\ &= 2 \times \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Ainsi l'espérance de la variable  $X$  est  $-\frac{1}{6}$ , cela veut dire que le joueur peut espérer gagner  $-\frac{1}{6}$ € en jouant à ce jeu.

**📌 Information :** Un jeu est **équitable** lorsque l'espérance de gain est nulle, il est **favorable au joueur** si cette espérance de gain est positive.

#### 🔗 À savoir faire 3 : Utiliser l'espérance

Un joueur mise 2,5€ pour participer à un jeu.

Ensuite, il tire successivement au hasard deux boules dans une urne contenant quatre boules numérotées de 1 à 4, avec remise dans l'urne de la première boule tirée.

On considère alors la différence entre le plus grand numéro et le plus petit numéro sur les deux boules tirées par le joueur. Une fois cette différence effectuée deux cas possibles :

- Si cette différence est impaire, le joueur reçoit 1,5€;
- Sinon, le joueur reçoit une somme égale au triple de cette différence.

On note  $G$  la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

1. Une issue de cette expérience aléatoire est un couple formé par la valeur de la première boule et la valeur de la seconde boule, comme par exemple (3, 1).

Déterminer alors  $G(3, 1)$ .

.....

.....

.....

2. Justifier que les valeurs prises par la variable aléatoire  $G$  sont  $-2,5$ ,  $-1$  et  $3,5$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Compléter le tableau de la loi de probabilité de  $G$  :

$k$	$-2,5$	$-1$	$3,5$
$\mathbb{P}(G = k)$	...	...	...

.....

.....

.....

.....

.....

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire  $G$ . Ce jeu est-il favorable au joueur?

.....

.....

.....

.....

5. En déduire une estimation du gain total de l'organisateur du jeu sur un échantillon de 4000 parties.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## B - Variance

### Définition 6 : Variance

Soit  $X$  une variable aléatoire, de support :  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de loi de probabilité  $\mathbb{P}$ .  
La **variance** de la variable aléatoire  $X$ , notée  $\mathbb{V}(X)$ , est le réel défini par :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\ &= (x_1 - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_1) + \dots + (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i)\end{aligned}$$

De plus, on appelle **écart-type** de la variable aléatoire  $X$ , noté  $\sigma(X)$ , le réel positif défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

### 🔗 À retenir : Interprétation de la variance et de l'écart-type

- La variance mesure la moyenne des carrés des distances entre chaque  $x_i$  et  $\mathbb{E}(X)$ , chaque carré étant pondéré par  $\mathbb{P}(X = x_i)$ .  
On retiendra surtout **la moyenne des carrés des écarts à la valeur moyenne**.
- L'écart-type mesure la distance moyenne des valeurs prises par  $X$  par rapport à sa valeur moyenne lorsque l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience.
- Un jeu est d'autant plus risqué que sa variance et son écart-type est grand.

### Exemple :

En reprenant l'exemple initial, on rappelle que :

$x_i$	-1	0	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\ &= (2 - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = 2) + (0 - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = 0) + (-1 - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = -1) \\ &= \left(2 + \frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(0 + \frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(-1 + \frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{41}{36}\end{aligned}$$

Et on a :  $\sigma(X) = \sqrt{\frac{41}{36}} = \frac{\sqrt{41}}{6}$ , on interprète alors le résultat en disant qu'en moyenne le gain d'un joueur s'écarte de  $\frac{\sqrt{41}}{6} \approx 1,07$  de l'espérance  $\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{6}$ , cela veut dire que le jeu est relativement risqué car l'écart-type qui vaut environ 1 est grand par rapport à l'espérance de gain qui est lui d'environ 0 et de l'ordre de grandeur des gains.

**Propriété 2 : Formule de König-Huyghens**

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ , on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

**Exemple :**

En reprenant l'exemple initial on a alors, d'après la formule de König-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

En calculant :

► D'une part :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= (-1)^2\mathbb{P}(X = -1) + 0^2\mathbb{P}(X = 0) + 2^2\mathbb{P}(X = 2) \\ &= \mathbb{P}(X = -1) + 4\mathbb{P}(X = 2) \\ &= \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

► D'autre part :

$$\mathbb{E}(X)^2 = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Donc :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{7}{6} - \frac{1}{36} = \frac{41}{36}$$

**✂ À savoir faire 4 : Variance et écart-type**

1. Déterminer la variance et l'écart-type de l'expérience aléatoire du **À savoir faire** précédent.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. On lance un dé équilibré à 6 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note  $X$  le nombre porté par la face du dessus.

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire  $X$ .

.....

.....

3. On lance un dé équilibré à  $n$  faces dont les faces sont numérotées de 1 à  $n$  et on note  $Y$  le nombre porté par la face du dessus.  
Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire  $Y$ .

### C - Transformation affine

#### Théorème 1 : Théorème de transfert

Soient  $X$  une variable aléatoire définie sur un univers fini  $\Omega$ , et de loi de probabilité  $\mathbb{P}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
La variable aléatoire  $aX + b$  associée à chaque issue  $\omega$  le réel  $aX(\omega) + b$  et on a alors :

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$  (l'espérance est linéaire) ;
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$  ;
- $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

#### À savoir faire 5 : Utiliser le théorème de transfert

1. Le nombre de spectateur pour un festival de musique définit une variable aléatoire  $X$  d'espérance 12 000 et de variance 1 500.  
Chaque billet est vendu au tarif de 45€ et le coût global d'organisation du festival de 100 000€.

Soit  $B$  la variable aléatoire associée au bénéfice réalisé par l'organisateur du spectacle.  
Déterminer  $\mathbb{E}(B)$  et  $\sigma(B)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. On considère que pour la session 2020 d'un concours, la note  $X$  sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance  $\mathbb{E}(X) = 5,4$  et pour écart-type  $\sigma(X) = 2$ .

Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1,5.

Ainsi il veut appliquer une transformation affine à  $X$  en lui associant  $aX + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a > 0$ .

(a) Exprimer  $\mathbb{E}(aX + b)$  et  $\sigma(aX + b)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

.....

.....

.....

(b) En déduire les valeurs de  $a$  et  $b$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### D - Bonus : variables aléatoires connues

**Partie IV Exercices****A - Problème de synthèse**

★★★★☆ EXERCICE 1 (Extrait BAC Centre Étrangers 2022) ..... (1)

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.

On établit la règle suivante :

- Un joueur perd 9€ si les deux jetons tirés sont de couleur blanche;
- Un joueur perd 1€ si les deux jetons tirés sont de couleur noire;
- Un joueur gagne 5€ si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 noirs et 3 jetons blancs.

- (a) Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- (b) Calculer la probabilité de perdre 9€ sur une partie.

2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connaît pas le nombre exact de jetons noirs.

On notera  $N$  le nombre de jetons noirs dans cette urne.

- (a) Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.  
Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

(b) Résoudre l'inéquation  $-x^2 + 30x - 81 > 0$ .

(c) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

(d) Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal?

3. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).

Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5€?