

Applications de la fonction dérivée

Plan du chapitre

I Variations d'une fonction	2
A - Visualisation graphique	2
B - Théorème	3
II Extrema	5
III Exercices	7
A - Variations d'une fonction	7
B - Extrema	8
C - Un peu de logique	10

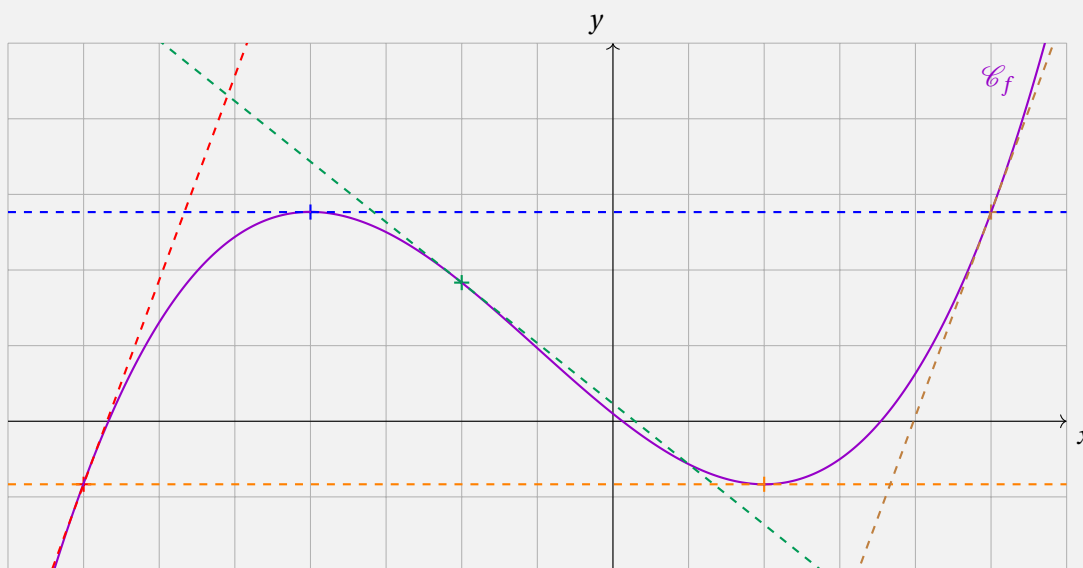
Introduction

Partie I Variations d'une fonction

A - Visualisation graphique

Activité 1 : Lien entre fonction dérivée et sens de variation

On représente graphiquement le graphe d'une fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, dans le repère orthonormé ci-dessous. De plus on trace les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -7 , -4 , -2 , 2 et 5 .



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique

- Donner le signe du nombre dérivé de f en -7 , -4 , -2 , 2 et 5 .

.....

.....

.....

.....

.....

- Sans justification dresser le tableau de signes de la fonction dérivée, f' , de la fonction f .

x	$-\infty$				$+\infty$
Signe de $f'(x)$					

- Dresser le tableau de variation de f .

x	$-\infty$				$+\infty$
Variations de f					

4. Compléter le tableau de signe de la dérivée - variations lié à la fonction f .

Quel lien peut-on faire entre le signe de la fonction dérivée f' et le sens de variation de la fonction f ?

x	$-\infty$			$+\infty$
Signe de $f'(x)$				
Variations de f				

.....

B - Théorème

Théorème 1 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

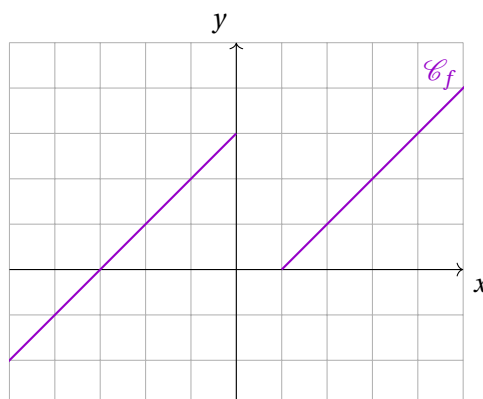
- f est croissante sur I si, et seulement si, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est strictement croissante sur I si, et seulement si, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur I si, et seulement si, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur I si, et seulement si, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Ce théorème est l'un des théorèmes majeurs des mathématiques du lycée, en effet il nous permet de faire le pont entre les deux grandes études que nous faisons jusqu'ici :

- l'étude du signe d'une fonction
- l'étude du sens de variation d'une fonction

🔥 Point chaud : Importance d'avoir un intervalle dans le théorème

Considérons l'ensemble $E =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et considérons la fonction représenté graphiquement dans un repère orthonormé par :



Partie II Extrema

Définition 1 : Extremum local

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.

On dit que f admet un **extrémum local sur I** s'il existe $a \in I$ tel que on ait :

- soit un **maximum local** en a , c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in I, f(x) \leq f(a)$$

- soit un **minimum local** en a , c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in I, f(x) \geq f(a)$$

Exemple :

En considérant le tableau de variation complet suivant :

x	-10	-5	-3	-1	0	5	6	10							
Variations de f	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0

On peut affirmer que :

- 1** est le minimum local de f sur $] -10, -3[$ atteint en $x = -5$;
- 6** est le maximum local de f sur $] -5, 5[$ mais aussi sur $] -10, 5[$ et s'avère même que c'est le maximum global de f sur $[-10, 10]$ atteint en $x = -1$.

Théorème 2 : Condition nécessaire et suffisante d'un extremum local

Soit f une fonction dérivable sur I un intervalle ouvert.

Si f' s'annule et change de signe en $a \in I$ alors f admet un extremum local en a .

⚠ Attention : Et la réciproque?

La réciproque de ce théorème est fautive, c'est-à-dire :

Si f admet un extremum local en $a \in I$ cela n'implique pas que f' s'annule et change de signe.

Considérer la fonction $x \mapsto 0$ sur $]0, 1[$ qui admet un minimum et un maximum local en tout point de l'intervalle ouvert pourtant la dérivée est constante et donc ne change pas de signes.

🔥 Point chaud : Et si on fait varier les hypothèses du théorème?

Si on omet l'hypothèse du changement de signe (qui pose problème pour avoir l'équivalence), le théorème reste-t-il vrai? La réponse est **Non**.

En effet en considérant la fonction cube : $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ on a que

$$f'(x) = 3x^2 \text{ et donc } f'(0) = 0 \text{ mais ne change pas de signe.}$$

0 n'est pas un extremum local de f sur $\mathbb{R}$ (et même de tout intervalle ouvert contenant 0).

✂ À savoir faire 2 : Déterminer des extrema locaux

Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - x^2 - 5x + 9$, préciser si ce sont également des extrema globaux.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Partie III Exercices

A - Variations d'une fonction

★★★★☆ EXERCICE 1 (Études) ①

En justifiant la dérivabilité, dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 - 6x + 3$

4. $f : x \mapsto \frac{2x-7}{5x+3}$

2. $f : x \mapsto x^3 - x^2 + 8x + 1$

5. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

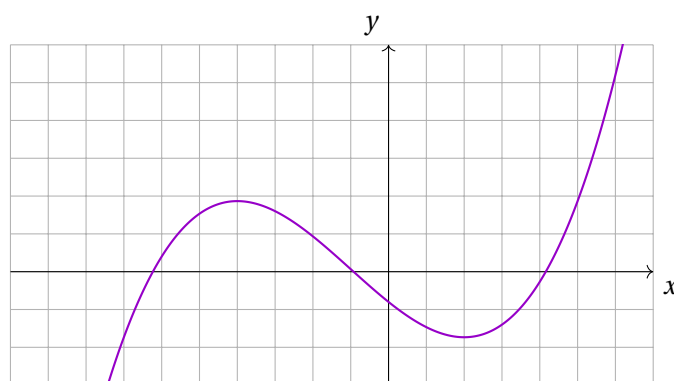
3. $f : x \mapsto -3x^3 + x^2 + x$

6. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x - 5}$

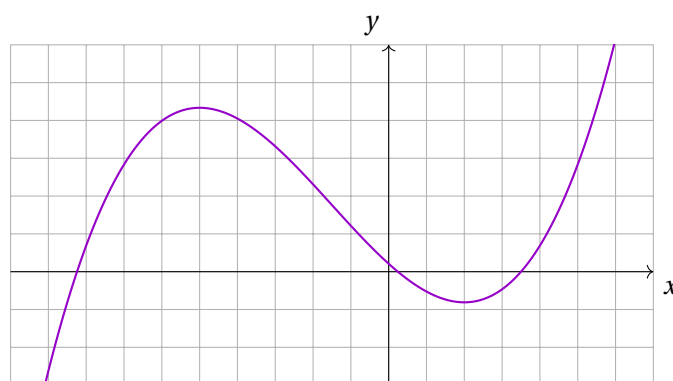
★★★★☆ EXERCICE 2 (Étude et courbes) ①

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 30x + 7$

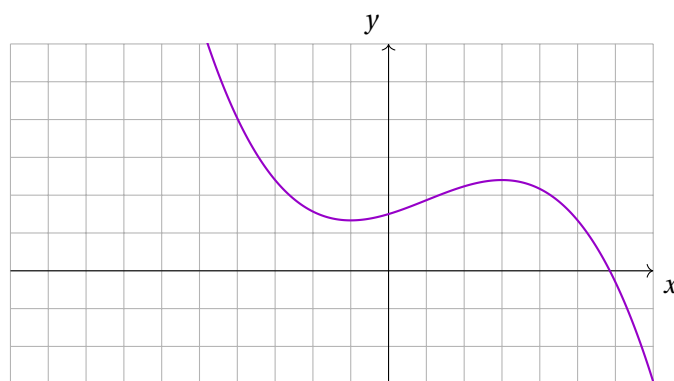
- Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis une expression de sa dérivée.
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 1.
- Déterminer, par le calcul, si la courbe de f admet des tangentes horizontales, puis les abscisses de ces points.
- En justifiant, déterminer laquelle de ces représentations graphiques peut être celle de la fonction f .



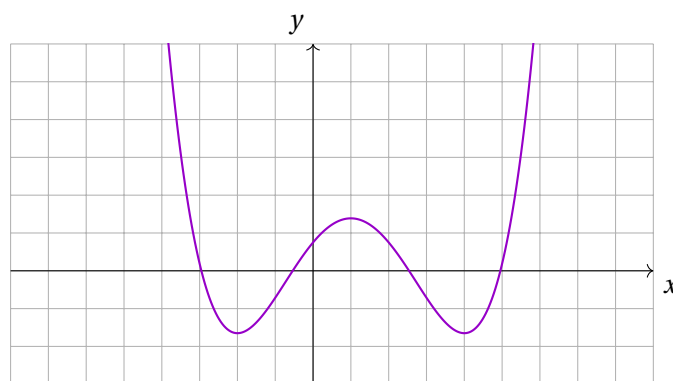
Courbe 1



Courbe 2



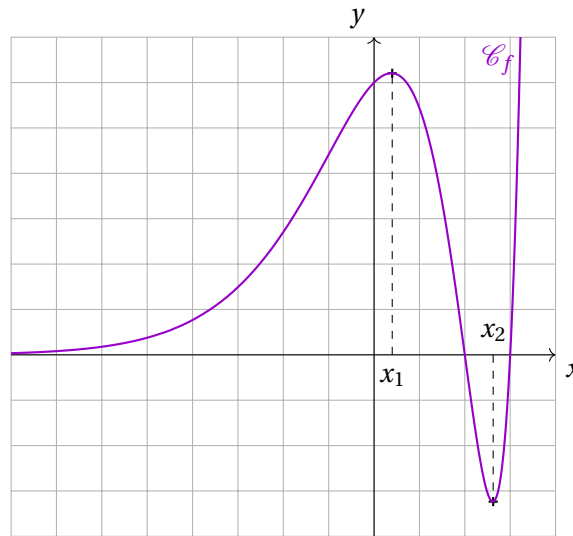
Courbe 3



Courbe 4

★★★☆☆ EXERCICE 3 (À partir d'une courbe)..... ⌚

Dresser le tableau de signes de la dérivée de f .



B - Extrema

★★★☆☆ EXERCICE 4 (Études #2) ⌚

- On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 5x + 10}{3x}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f .
 - Déterminer $f'(x)$.
 - Construire le tableau de variations de f .
 - Quels sont les extrema locaux de f ?
- De la même manière, déterminer les extrema locaux de $g : x \mapsto x^4 - x^2$.
- De même, pour $h : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Optimisation #1) ⌚

Soit $P \in \mathbb{R}_+$, on considère l'ensemble des rectangles ayant comme périmètre P .

On choisit un rectangle $ABCD$ ayant comme périmètre P .

L'objectif de cet exercice est de déterminer le rectangle, de périmètre P , ayant l'aire la plus grande. On fixe $AB = x$.

- Déterminer BC .
- En déduire l'aire du rectangle $ABCD$ en fonction de x et de P .
- Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale? A quel rectangle particulier cette valeur de x correspond-elle?

★★★★☆ EXERCICE 6 (Optimisation #2) ⌚

On considère un carré $ABCD$ de côté 1.

Soit $M \in [AD]$, on place un point N sur la demi-droite $[AB)$, à l'extérieur du segment $[AB]$, tel que : $DM = BN = x$.

La droite (MN) intersecte le segment $[BC]$ en un point P .

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point $M \in [AD]$ tel que BP soit maximale.

- Déterminer l'ensemble auquel appartient x .

2. Représenter graphiquement la situation.

3. Déterminer BP en fonction de x .

On définit

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x - x^2}{1 + x}$$

4. Dresser le tableau de variation de f .

5. Conclure.

★★★★☆ EXERCICE 7 (Inégalité) (V)

Montrer que pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$.

★★★★☆ EXERCICE 8 (À vous de chercher) (L)

Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ possédant exactement quatre extrema locaux.

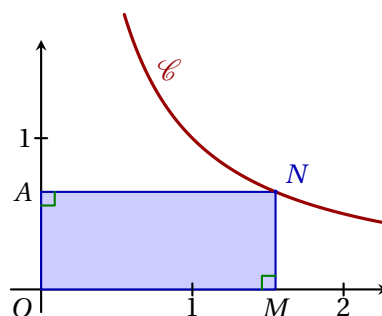
★★★★☆ EXERCICE 9 (V)

1. Considérons p une fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $p(x) = x + \frac{1}{x}$.

(a) Étudier les variations de la fonction p .

(b) Démontrer que le minimum de la fonction p sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est égal 2.

2. Sur la figure ci-dessous, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

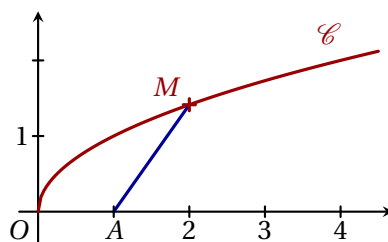


À partir d'un point N de $\mathcal{C}$, on construit, comme indiqué ci-dessus, le rectangle $OMNA$. Déterminer les dimensions du rectangle $OMNA$ de périmètre minimum.

★★★★☆ EXERCICE 10 (L)

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction racine carrée. A est le point de coordonnées $(1, 0)$.

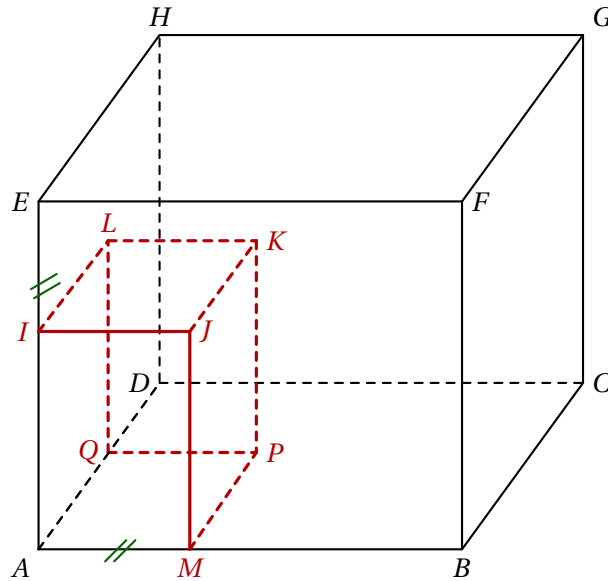
Déterminer la position du point M de $\mathcal{C}$ le plus proche de A .



★★★★☆ EXERCICE 11 (Cube) (V)

Considérons $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6cm et M est un point de l'arête $[AB]$ et I un point de l'arête $[AE]$ tels que $AM = EI = x$.

On construit à l'intérieur du cube le parallélépipède rectangle $AMPQIJLK$ de base carré $AMPQ$.



1. Exprimer le volume $V(x)$, en cm^3 , de $AMPQIJKL$ en fonction de x .
2. Étudier les variations de la fonction V sur l'intervalle $[0, 6]$.
3. En déduire, la position du point M sur l'arête $[AB]$ pour laquelle le volume $V(x)$ est maximum.

C - Un peu de logique...

★★★☆☆ EXERCICE 12 (Quantificateurs) (L)

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x}$$

Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse.

1. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \geq 0$.
3. Il existe un intervalle sur lequel f est croissante.
4. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0)$ soit un minimum local de f .
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \leq -6$.

★★★☆☆ EXERCICE 13 (Négation d'une proposition) (V)

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

- **P** : "Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 2$ ";
- **Q** : "Il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que $f'(x) \geq 0$ ".

★★★☆☆ EXERCICE 14 (Réciproque et contraposée) (L)

Considérons f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Voici une implication :

"Si pour tout $x \in I$ où I est un intervalle réel, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ."

1. Écrire la réciproque et la contraposée de cette implication.
2. Pour chacune de ces implications, dire si elle est vraie ou fausse.

VRAI OU FAUX ?



a) On considère une fonction f telle que $f'(x) = 2x - 4$. Alors f est décroissante sur $] -\infty; 2]$.

☐ ☐

b) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x^2 + 1$. Alors f admet un minimum.

☐ ☐

c) On considère une fonction f telle que $f'(x) = -(x-3)^2$. Alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

☐ ☐

d) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x(x-2)$. Alors f est croissante sur $]0; 2[$.

☐ ☐

e) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x(x-2)$. Alors f admet un maximum local en $x = 0$.

☐ ☐

f) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x(x-2)$. Alors f admet un minimum local en $x = 2$.

☐ ☐

g) On considère une fonction f telle que $f'(x) = -(x+1)(x-2)$. Alors f est croissante sur $] -1; 2[$.

☐ ☐

h) On considère une fonction f telle que $f'(x) = -(x+1)(x-2)$. Alors f admet un maximum local en $x = -1$.

☐ ☐

i) On considère une fonction f telle que $f'(x) = 3(x-1)^2$. Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

☐ ☐

j) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x^2 - 9$. Alors f est décroissante sur $] -3; 3[$.

☐ ☐

k) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x^2 - 9$. Alors f admet un maximum local en $x = 3$.

☐ ☐



l) On considère une fonction f telle que $f'(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$. Alors f est croissante sur $]2; +\infty[$. ☐ ☐

m) On considère une fonction f telle que $f'(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$. Alors f est décroissante sur $] -\infty; +\infty[$. ☐ ☐