

Applications de la fonction dérivée

Plan du chapitre

I Variations d'une fonction	2
A - Visualisation graphique	2
B - Théorème	3
II Extrema	5
III Exercices	7
A - Variations d'une fonction	7
B - Extrema	8
C - Un peu de logique	10

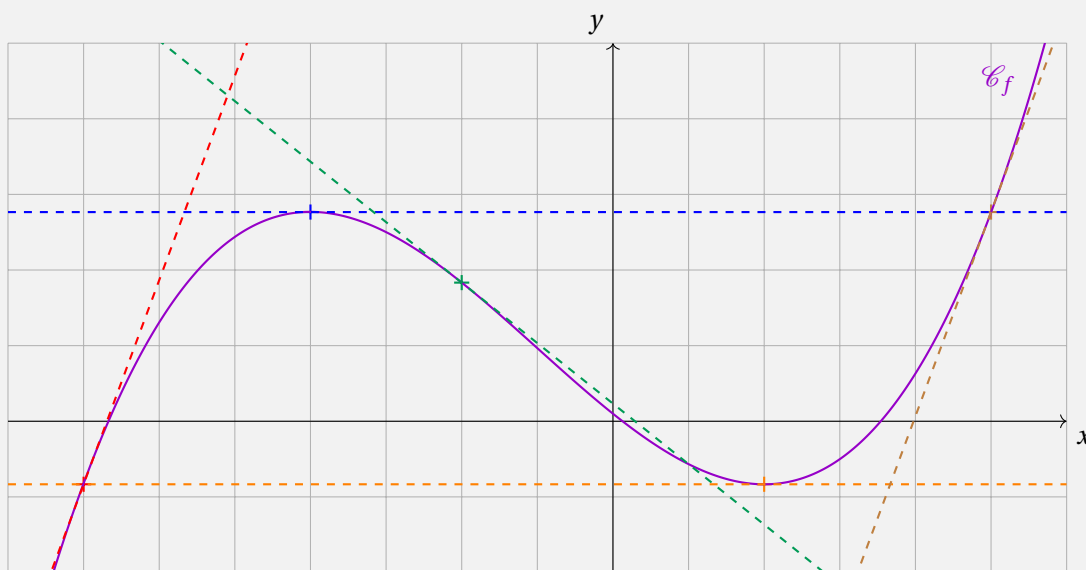
Introduction

Partie I Variations d'une fonction

A - Visualisation graphique

Activité 1 : Lien entre fonction dérivée et sens de variation

On représente graphiquement le graphe d'une fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, dans le repère orthonormé ci-dessous. De plus on trace les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -7 , -4 , -2 , 2 et 5 .



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique

- Donner le signe du nombre dérivé de f en -7 , -4 , -2 , 2 et 5 .

.....

.....

.....

.....

.....

- Sans justification dresser le tableau de signes de la fonction dérivée, f' , de la fonction f .

x	$-\infty$				$+\infty$
Signe de $f'(x)$					

- Dresser le tableau de variation de f .

x	$-\infty$				$+\infty$
Variations de f					

4. Compléter le tableau de signe de la dérivée - variations lié à la fonction f .

Quel lien peut-on faire entre le signe de la fonction dérivée f' et le sens de variation de la fonction f ?

x	$-\infty$			$+\infty$
Signe de $f'(x)$				
Variations de f				

.....

B - Théorème

Théorème 1 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

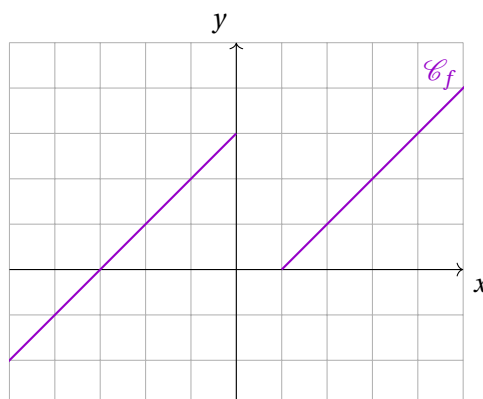
- f est croissante sur I si, et seulement si,
- f est strictement croissante sur I si, et seulement si,
- f est décroissante sur I si, et seulement si,
- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si,
- f est constante sur I si, et seulement si,

Ce théorème est l'un des théorèmes majeurs des mathématiques du lycée, en effet il nous permet de faire le pont entre les deux grandes études que nous faisons jusqu'ici :

- l'étude du signe d'une fonction
- l'étude du sens de variation d'une fonction

🔥 Point chaud : Importance d'avoir un intervalle dans le théorème

Considérons l'ensemble $E =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et considérons la fonction représenté graphiquement dans un repère orthonormé par :



Partie II Extrema

Définition 1 : Extremum local

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.

On dit que f admet un **extrémum local sur I** s'il existe $a \in I$ tel que on ait :

- soit un **maximum local** en a , c'est-à-dire :

pour tout $x \in I$,

- soit un **minimum local** en a , c'est-à-dire :

pour tout $x \in I$,

Exemple :

En considérant le tableau de variation complet suivant :

x	-10	-5	-3	-1	0	5	6	10								
Variations de f	3	$\searrow$		1	$\nearrow$		2	6	$\searrow$		5	-4	$\nearrow$		-2	0

On peut affirmer que :

- est le minimum local de f sur $] -10, -3[$ atteint en
- est le maximum local de f sur $] -5, 5[$ mais aussi sur $] -10, 5[$ et s'avère même que c'est le maximum global de f sur $[-10, 10]$ atteint en

Théorème 2 : Condition nécessaire et suffisante d'un extremum local

Soit f une fonction dérivable sur I un intervalle ouvert.

Si f' s'annule et change de signe en $a \in I$ alors f admet un extremum local en a .

⚠ Attention : Et la réciproque?

La réciproque de ce théorème est fautive, c'est-à-dire :

Si f admet un extremum local en $a \in I$ cela n'implique pas que f' s'annule et change de signe.

Considérer la fonction $x \mapsto 0$ sur $]0, 1[$ qui admet un minimum et un maximum local en tout point de l'intervalle ouvert pourtant la dérivée est constante et donc ne change pas de signes.

🔥 Point chaud : Et si on fait varier les hypothèses du théorème?

Si on omet l'hypothèse du changement de signe (qui pose problème pour avoir l'équivalence), le théorème reste-t-il vrai? La réponse est **Non**.

En effet en considérant la fonction cube : $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ on a que

$$f'(x) = 3x^2 \text{ et donc } f'(0) = 0 \text{ mais ne change pas de signe.}$$

0 n'est pas un extremum local de f sur $\mathbb{R}$ (et même de tout intervalle ouvert contenant 0).

✂ À savoir faire 2 : Déterminer des extrema locaux

Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - x^2 - 5x + 9$, préciser si ce sont également des extrema globaux.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Partie III Exercices

A - Variations d'une fonction

★★★★☆ EXERCICE 1 (Études) ①

En justifiant la dérivabilité, dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 - 6x + 3$

4. $f : x \mapsto \frac{2x-7}{5x+3}$

2. $f : x \mapsto x^3 - x^2 + 8x + 1$

5. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

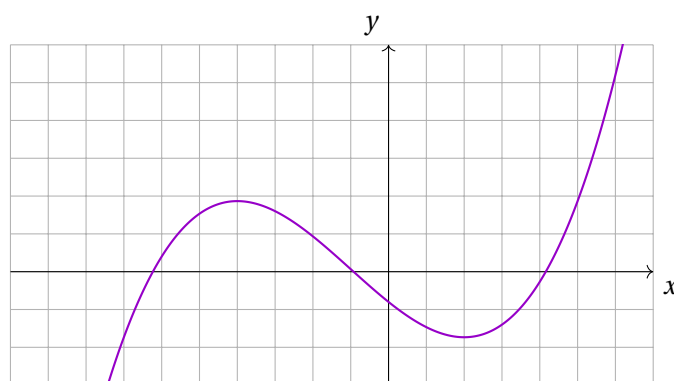
3. $f : x \mapsto -3x^3 + x^2 + x$

6. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x - 5}$

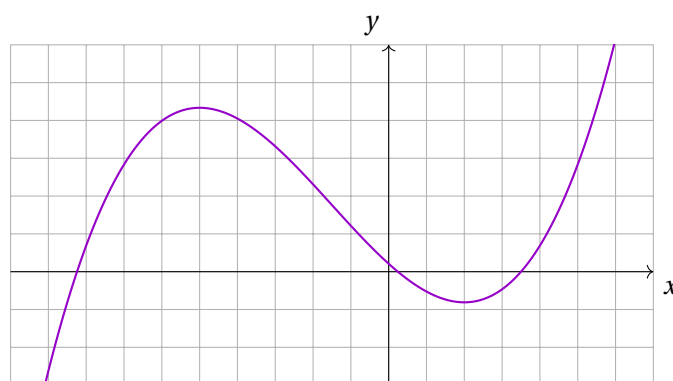
★★★★☆ EXERCICE 2 (Étude et courbes) ①

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 30x + 7$

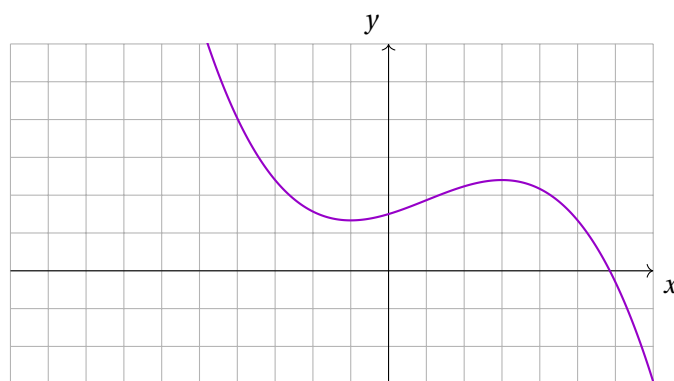
- Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis une expression de sa dérivée.
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 1.
- Déterminer, par le calcul, si la courbe de f admet des tangentes horizontales, puis les abscisses de ces points.
- En justifiant, déterminer laquelle de ces représentations graphiques peut être celle de la fonction f .



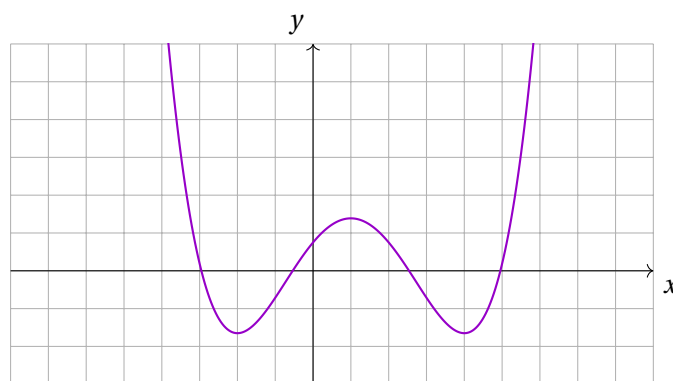
Courbe 1



Courbe 2



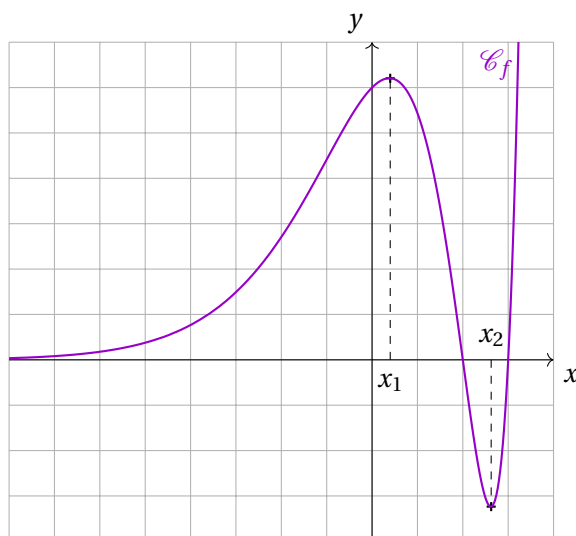
Courbe 3



Courbe 4

★★★☆☆ EXERCICE 3 (À partir d'une courbe)..... ⌚

Dresser le tableau de signes de la dérivée de f .



B - Extrema

★★★☆☆ EXERCICE 4 (Études #2) ⌚

- On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 5x + 10}{3x}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f .
 - Déterminer $f'(x)$.
 - Construire le tableau de variations de f .
 - Quels sont les extrema locaux de f ?
- De la même manière, déterminer les extrema locaux de $g : x \mapsto x^4 - x^2$.
- De même, pour $h : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Optimisation #1) ⌚

Soit $P \in \mathbb{R}_+^*$, on considère l'ensemble des rectangles ayant comme périmètre P .

On choisit un rectangle $ABCD$ ayant comme périmètre P .

L'objectif de cet exercice est de déterminer le rectangle, de périmètre P , ayant l'aire la plus grande. On fixe $AB = x$.

- Déterminer BC .
- En déduire l'aire du rectangle $ABCD$ en fonction de x et de P .
- Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale? A quel rectangle particulier cette valeur de x correspond-elle?

★★★★☆ EXERCICE 6 (Optimisation #2) ⌚

On considère un carré $ABCD$ de côté 1.

Soit $M \in [AD]$, on place un point N sur la demi-droite $[AB)$, à l'extérieur du segment $[AB]$, tel que : $DM = BN = x$.

La droite (MN) intersecte le segment $[BC]$ en un point P .

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point $M \in [AD]$ tel que BP soit maximale.

- Déterminer l'ensemble auquel appartient x .

2. Représenter graphiquement la situation.

3. Déterminer BP en fonction de x .

On définit

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x - x^2}{1 + x}$$

4. Dresser le tableau de variation de f .

5. Conclure.

★★★★☆ EXERCICE 7 (Inégalité) (V)

Montrer que pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$.

★★★★☆ EXERCICE 8 (À vous de chercher) (L)

Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ possédant exactement quatre extrema locaux.

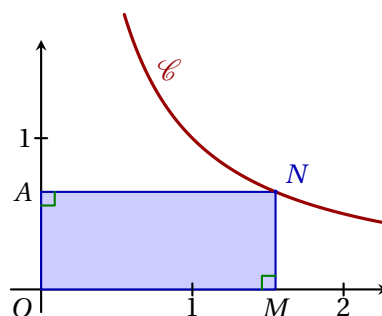
★★★★☆ EXERCICE 9 (V)

1. Considérons p une fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $p(x) = x + \frac{1}{x}$.

(a) Étudier les variations de la fonction p .

(b) Démontrer que le minimum de la fonction p sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est égal 2.

2. Sur la figure ci-dessous, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

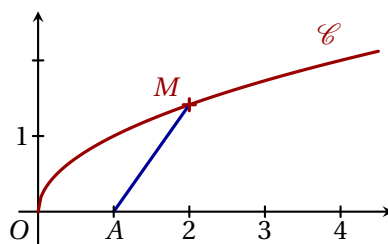


À partir d'un point N de $\mathcal{C}$, on construit, comme indiqué ci-dessus, le rectangle $OMNA$.
Déterminer les dimensions du rectangle $OMNA$ de périmètre minimum.

★★★★☆ EXERCICE 10 (L)

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction racine carrée. A est le point de coordonnées $(1, 0)$.

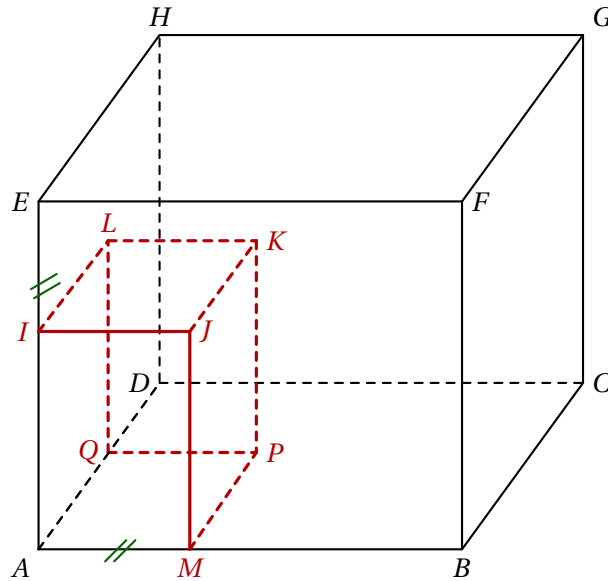
Déterminer la position du point M de $\mathcal{C}$ le plus proche de A .



★★★★☆ EXERCICE 11 (Cube) (V)

Considérons $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6cm et M est un point de l'arête $[AB]$ et I un point de l'arête $[AE]$ tels que $AM = EI = x$.

On construit à l'intérieur du cube le parallélépipède rectangle $AMPQIJLK$ de base carré $AMPQ$.



1. Exprimer le volume $V(x)$, en cm^3 , de $AMPQIJKL$ en fonction de x .
2. Étudier les variations de la fonction V sur l'intervalle $[0, 6]$.
3. En déduire, la position du point M sur l'arête $[AB]$ pour laquelle le volume $V(x)$ est maximum.

C - Un peu de logique...

★★★☆☆ EXERCICE 12 (Quantificateurs) (L)

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x}$$

Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse.

1. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \geq 0$.
3. Il existe un intervalle sur lequel f est croissante.
4. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0)$ soit un minimum local de f .
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \leq -6$.

★★★☆☆ EXERCICE 13 (Négation d'une proposition) (V)

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

- **P** : "Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 2$ ";
- **Q** : "Il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que $f'(x) \geq 0$ ".

★★★☆☆ EXERCICE 14 (Réciproque et contraposée) (L)

Considérons f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Voici une implication :

"Si pour tout $x \in I$ où I est un intervalle réel, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ."

1. Écrire la réciproque et la contraposée de cette implication.
2. Pour chacune de ces implications, dire si elle est vraie ou fausse.

VRAI OU FAUX ?



a) On considère une fonction f telle que $f'(x) = 2x - 4$. Alors f est décroissante sur $] -\infty; 2]$.

☐ ☐

b) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x^2 + 1$. Alors f admet un minimum.

☐ ☐

c) On considère une fonction f telle que $f'(x) = -(x-3)^2$. Alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

☐ ☐

d) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x(x-2)$. Alors f est croissante sur $]0; 2[$.

☐ ☐

e) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x(x-2)$. Alors f admet un maximum local en $x = 0$.

☐ ☐

f) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x(x-2)$. Alors f admet un minimum local en $x = 2$.

☐ ☐

g) On considère une fonction f telle que $f'(x) = -(x+1)(x-2)$. Alors f est croissante sur $] -1; 2[$.

☐ ☐

h) On considère une fonction f telle que $f'(x) = -(x+1)(x-2)$. Alors f admet un maximum local en $x = -1$.

☐ ☐

i) On considère une fonction f telle que $f'(x) = 3(x-1)^2$. Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

☐ ☐

j) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x^2 - 9$. Alors f est décroissante sur $] -3; 3[$.

☐ ☐

k) On considère une fonction f telle que $f'(x) = x^2 - 9$. Alors f admet un maximum local en $x = 3$.

☐ ☐



l) On considère une fonction f telle que $f'(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$. Alors f est croissante sur $]2; +\infty[$. ☐ ☐

m) On considère une fonction f telle que $f'(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$. Alors f est décroissante sur $] -\infty; +\infty[$. ☐ ☐