CHAPITRE 5

# Probabilités conditionnelles et indépendances

## Plan du chapitre


**I Pour débuter** ........ **2**
- A - Rappels ........ 2
- B - Découverte ........ 5

**II Probabilités conditionnelles** ........ **6**
- A - Définitions ........ 6
- B - Partition et probabilités totales ........ 9

**III Indépendance** ........ **12**

**IV Exercices** ........ **14**
- A - Rappels ........ 14
- B - Probabilités conditionnelles ........ 15
- C - Partition et probabilités totales ........ 15
- D - Indépendance ........ 17
- E - Problèmes ........ 18

# Partie I Pour débuter

## A - Rappels

Dans cette partie on fera quelques rappels afin d'avoir le vocabulaire et les définitions bien en tête.

**Définition 1 :**

- En théorie des probabilités, on appelle **événement** un fait ou un résultat qui peut (ou ne peut pas) être réalisé à la suite d'une **expérience aléatoire**.
- Chaque événement est réalisé par des **issues**, on les notera parfois $\omega$ (oméga minuscule).
- Un **événement** est une ensemble d'issue possible d'une expérience aléatoire.
- L'ensemble des issues possibles pour une expérience aléatoires données s'appelle l'**univers des possibles** (ou simplement **univers**) on le notera :

$$\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}}$$

**Exemple :**

- Un lancer de dé équilibré à six faces est une **expérience aléatoire** ;
- Lors de cette expérience aléatoire, 4 est une **issue possible** et 7 est une **issue impossible** ;
- L'**univers des possibles** de notre expérience aléatoire : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on pourra noter : $\omega_1 = 1, ...$
- L'**événement** noté $A$ : « Obtenir un nombre pair » est réalisé par les issues $\omega_2 = 2, \omega_4 = 4$ et $\omega_6 = 6$ on pourra noter que $A = \{2, 4, 6\}$ ;
- L'évenement $B$ : « Obtenir un nombre plus grand que 7 » est un **événement impossible** en effet aucune des issues possibles dans notre univers $\Omega$ ne réalise l'événement $B$.

**À savoir faire 1 : Décrire une expérience aléatoire**

Considérons l'expérience aléatoire tirer une lettre dans mon nom : « `DESORGERIS` ».

1. Donner issue possible et une issue impossible de cette expérience aléatoire.

   ...................................................................................................................

   ...................................................................................................................

2. Décrire l'univers des possibles $\Omega$ de cette expérience aléatoire.

   ...................................................................................................................

   ...................................................................................................................

   ...................................................................................................................

3. Considérons l'événement $A$ : « Tirer une voyelle » associé à notre expérience aléatoire.
   Décrire l'univers des possibles de notre expérience aléatoire.

   ...................................................................................................................

   ...................................................................................................................

   ...................................................................................................................

4. Considérons l'événement $B$ : « Tirer une lettre présente dans le prénom `Paul` »
   Décrire l'univers des possibles de notre expérience aléatoire.

   ...................................................................................................................

   ...................................................................................................................

   ...................................................................................................................

**Définition 2 : Probabilité**

On appelle **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ une fonction :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}: & \Omega & \longrightarrow & [0,1] \\ & \omega_k & \longmapsto & \mathbb{P}(\omega_k) \end{array}$$

qui à chaque issue lui associe un réel compris entre 0 et 1 et tel que la somme des images de chacune des issues de notre univers $\Omega$ est égale à 1.
On dira alors que $\mathbb{P}(\omega_k)$ est la **probabilité** de l'issue $\omega_k$ dans l'expérience aléatoire d'univers $\Omega$.

**Exemple :**

En reprenant l'expérience d'un lancer de dé équilibré à six faces décrit dans l'exemple précédent.

- On a $\mathbb{P}(4) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(7) = 0$
- Comme $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}$
  On peut définir :
  $$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}: & \Omega & \longrightarrow & [0,1] \\ & \omega & \longmapsto & \mathbb{P}(\omega) \end{array}$$
  de plus comme :
  $$\mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$
  On peut dire que $\mathbb{P}$ définie une probabilité sur notre univers $\Omega$.

**Définition 3 : Probabilité d'un événement**

La **probabilité d'un événement** $A$, notée $\mathbb{P}(A)$, est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement.

**Exemple :**

En reprenant l'expérience d'un lancer de dé équilibré à six faces.
Comme l'événement $A$ : « Obtenir un nombre pair » est tel que $A = \{2, 4, 6\}$ . On a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

**À retenir : Événements particuliers**

En particulier $\Omega$ et $\emptyset$ sont deux événements, le premier est appelé événement certain et on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ tandis que le second est appelé événement impossible et on a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

**À savoir faire 2 : Probabilité d'événements**

En reprenant l'expérience aléatoire du **À savoir 1**.
Déterminer la probabilité de l'événement $A$ puis de l'événement $B$.

..........................................................................................

..........................................................................................

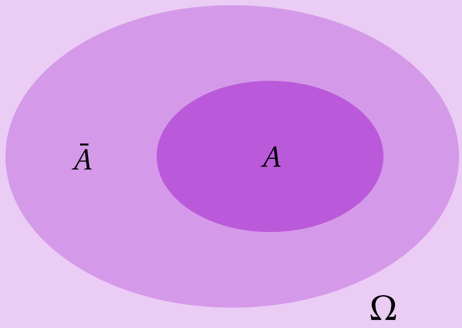
..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

### Définition 4 : Événement contraire

Soit $A$ un événement d'un expérience aléatoire d'univers $\Omega$.
On appelle **événement contraire** de $A$ l'événement, noté $\boldsymbol{\overline{A}}$, réalisé par les issues ne réalisant pas $A$.




### Propriété 1 : Probabilité de l'événement contraire

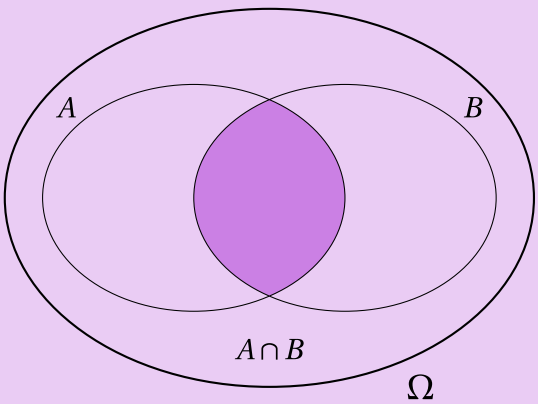
Soit $A$ un événement d'une expérience d'univers $\Omega$, la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ est :

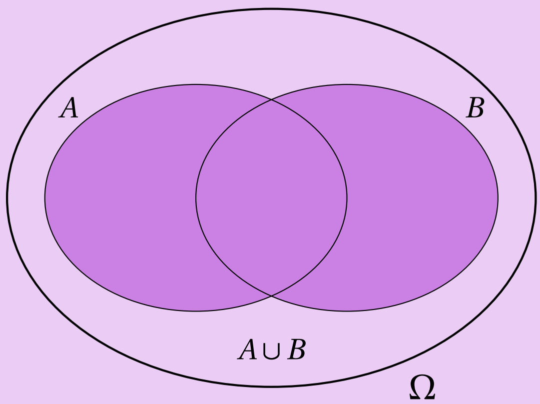
$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

### Définition 5 : Union et intersection

Soient $A$ et $B$ deux événement d'une aléatoire d'univers $\Omega$.

- L'événement $\boldsymbol{A \cap B}$ est l'événement réalisé par les issues réalisant $A$ **et** $B$.
- L'événement $\boldsymbol{A \cup B}$ est l'événement réalisé par les issues réalisant $A$ **ou** $B$.




**Exemple :**

Dans l'expérience d'un lancer de dé équilibré à six faces, en considérant les événements $A$ : « Obtenir un nombre pair » et $C$ : « Obtenir un nombre plus petit que 5 ». On a alors :

$$A \cap C = \{2, 4\}$$

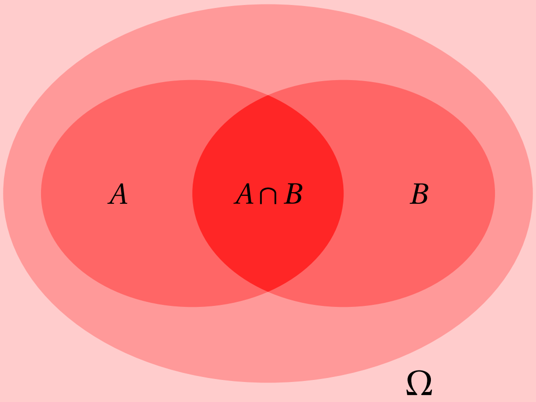
et

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

### Théorème 1 :

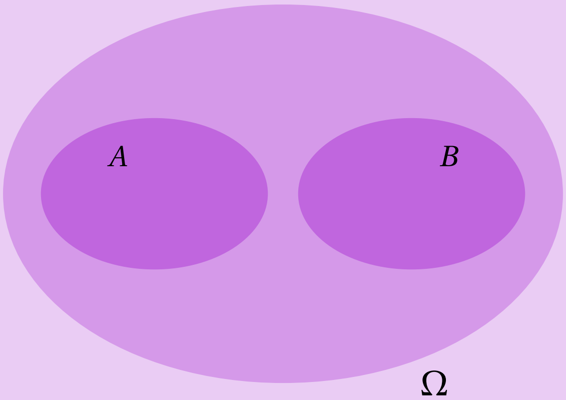
Soient $A$ et $B$ deux événements d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$




**Définition 6 : Événements incompatibles**

Considérons deux événements $A$ et $B$ d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$.
On dit que $A$ et $B$ sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.




**Exemple :**

Pour l'expérience aléatoire d'un lancer de dé équilibré, on a que les événements « Obtenir un nombre plus petit que 2 » et « Obtenir un nombre plus grand que 5 » sont des événements incompatibles.

## B - Découverte

Pour introduire ce chapitre, intéressons-nous à l'expérience aléatoire suivante, dans une urne on place trois boules blanches et cinq boules noires indiscernables au toucher. Notre expérience aléatoire consiste à tirer deux boules successivement, sans remettre la boule du premier tirage dans l'urne, on dira qu'on effectue deux tirages successifs sans remise.
On note $B_i$ l'événement : « Tirer une boule blanche au tirage $i$ » et $N_i$ : « Tirer une boule noire au tirage $i$ », ici comme nous avons deux tirages on a $i = 1$ ou 2.
Ici il est clair que :

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(N_1) = \frac{5}{8}$$

Intéressons-nous maintenant à l'événement $B_2$ : « Tirer une boule blanche au tirage 2 », deux possibilités pour réaliser cet événement :

- Soit on a tiré une boule blanche au premier tirage puis une seconde au deuxième tirage.
  Comme une boule blanche a déjà été tiré et qu'il n'y a pas de remise dans notre expérience, la probabilité de tirer une boule blanche au second tirage sachant que l'on en a déjà tiré une au premier tirage est de $\frac{2}{7}$

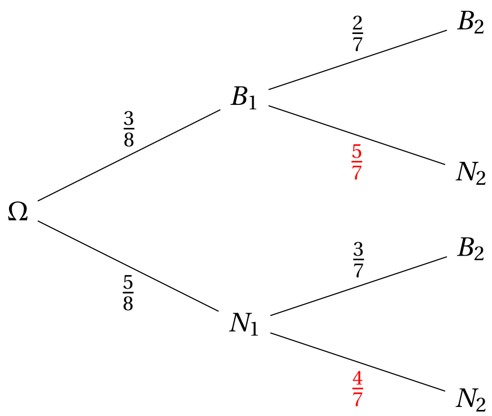
On notera :

$$\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{2}{7}$$

- Soit on a tiré une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second.
  Comme une boule noire a été tiré et qu'il n'y a pas de remise dans notre expérience, la probabilité de tirer une boule blanche au second tirage sachant que l'on a tiré une boule blanche au premier tirage est de $\frac{3}{7}$
  On notera :

$$\mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \frac{3}{7}$$

Les deux probabilités que l'on vient de calculer sont appelées **probabilités conditionnelles**.
La situation peut être représentée à l'aide de l'arbre de probabilité suivant :




Il semble assez clair que :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$$

On aimerait alors calculer $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$ et $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$.

# Partie II Probabilités conditionnelles

## A - Définitions

**Définition 7 : Probabilités conditionnelles**

Soient $A$ et $B$ deux événements d'un univers $\Omega$, avec $B$ un événement qui n'est pas impossible.
La **probabilité de l'événement $A$ sachant que l'événement $B$** est réalisé, est définie par :

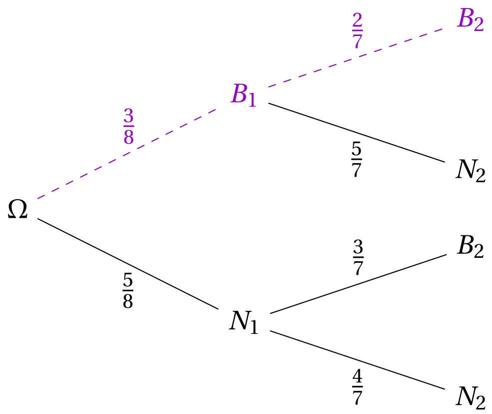
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

**Information :** On impose à l'événement $B$ de ne pas être impossible, sinon $\mathbb{P}(B) = 0$.

**Exemple :**

En reprenant l'exemple de la partie découverte précédente on a :

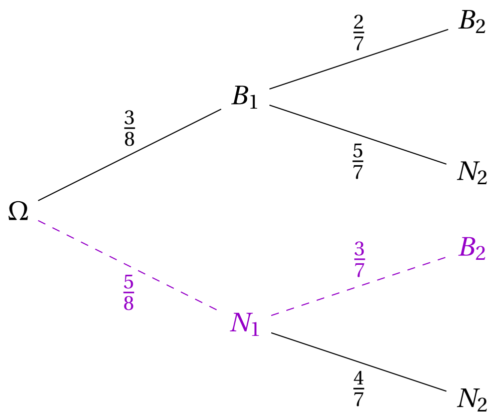
$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$




$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

On retiendra que l'on fait le produit des probabilités pondèrent le chemin allant de $\Omega$ à $B_2$ passant par $B_1$.
De l'autre côté on a :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$




$\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

**À savoir faire 3 : Probabilités conditionnelles dans un tableau**

Dans le tableau ci-dessous on note la répartition d'un échantillon de 100 gâteaux d'un pâtissier, suivant la taille et le goût donné :

| Saveur / Taille | Datte | Noix | Pistache | **Total** |
|---|---|---|---|---|
| Petite | 30 | 27 | 2 | **80** |
| Grande | 9 | 7 | 4 | **20** |
| **Total** | **39** | **34** | **27** | **100** |

On considère l'expérience aléatoire de tirer au hasard un gâteau parmi les 100.

1. Déterminer la probabilité que le gâteau choisit soit saveur Datte.

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

2. Déterminer la probabilité que le gâteau choisit soit de grande taille.

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

3. Déterminer la probabilité que le gâteau choisit soit saveur Pistache sachant qu'il est de petite taille.

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

**À retenir :** Cet exemple nous permet de voir que pour calculer une probabilité conditionnelle il est nécessaire de changer d'univers.
Dans l'exemple découverte, on est passé de l'univers $\Omega = \{B, B, B, N, N, N, N, N\}$ à $\tilde{\Omega} = \{B, B, N, N, N, N, N\}$ si on a tiré une boule blanche au premier tirage ou $\tilde{\Omega} = \{B, B, B, N, N, N, N\}$ si on a tiré une boule noire au premier tirage.

**Propriété 2 : Autour de la probabilité conditionnelle**

Soient $A$ et $B$ deux événements non impossibles d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$, alors :

- $\mathbb{P}_A(A) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$
- $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = 1$

***Démonstration* :**

Démontrons ou expliquons les points précédents :

- Il est clair que la probabilité que l'événement $A$ (un événement non impossible) se réalise sachant qu'il se réalise est égale à 1, on peut également le voir par le calcul :

$$\mathbb{P}_A(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$$

- Ce point repose sur le fait que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A)$
  - ▶ D'une part :
  $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$
  - ▶ D'autre part :
  $$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

  D'où $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$
- On a par définition :
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
  Or par le point précédent on sait que : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ donc :
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$
- Ce dernier point n'est pas encore démontrable mais on retiendra que :

**La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est toujours égale à 1**

■

## B - Partition et probabilités totales

**Exemple :**

Considérons $\Omega$ l'ensemble des voitures d'un collectionneur possédant des voitures de trois couleurs blanc, noir et rouge. Soit trois événements :

- $B$ : « Choisir une voiture blanche »
- $N$ : « Choisir une voiture noire »
- $R$ : « Choisir une voiture rouge »

Nous pouvons affirmer que :

- Ces trois événements ne sont **pas impossibles** ($B, N$ et $R$ sont non vides) ;
- Ces trois événements sont dits **deux à deux disjoints**, c'est-à-dire aucune issue ne réalise ne réalise deux événements différents ;
- Leur **union forme tout $\Omega$**, toute issue apparaît dans au moins un de ces trois événements.

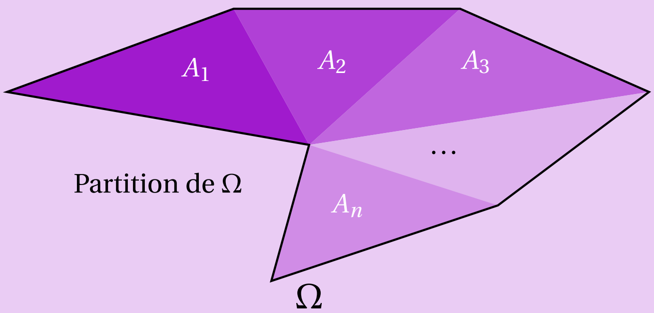
On dira alors que $B, N$ et $R$ forment une partition de $\Omega$.

**Définition 8 : Partition**

Soient $A_1, A_2, ...$ et $A_n$ $n$ événements de l'univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.
On dit alors que les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une **partition de l'univers** si :

- Aucun des événements $A_i$ n'est impossible ;
- Les événements $A_i$ sont deux à deux incompatibles ;
- La réunion des événements $A_i$ est l'univers tout entier.

La situation se représente ainsi :




**À retenir :** On dira aussi que ces événements forment un **système complet d'événements**.

**Propriété 3 : Événement et son contraire**

Soit $A$ un événement ni certain ni impossible d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$, alors $\left\{A, \overline{A}\right\}$ forment une partition de l'univers $\Omega$ (forment un système complet d'événements).

***Démonstration* :**

En effet :

- $A$ et $\overline{A}$ ne sont pas impossibles car $A$ n'est ni certain ni impossible ;
- Clairement $A$ et $\overline{A}$ sont incompatibles car $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ;
- De plus on a : $A \cup \overline{A} = \Omega$

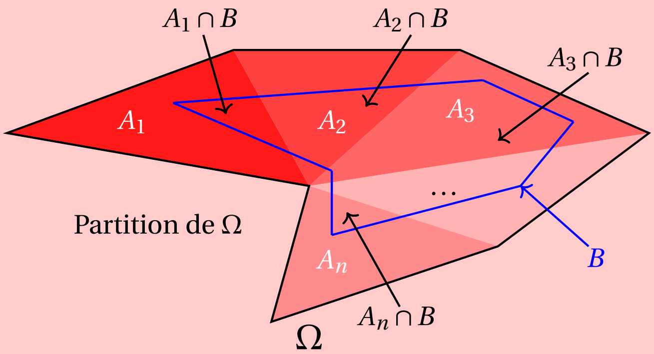
■

**Théorème 2 : Formule des probabilités totales**

Soient $A_1, A_2, \ldots$ et $A_n$ $n$ événements formant une partition de l'univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.
Alors pour tout événement $B$ de $\Omega$ on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B)$$

La situation se représente ainsi :




**Exemple :**

En reprenant l'exemple précédent du collectionneur de voiture. Supposons que :

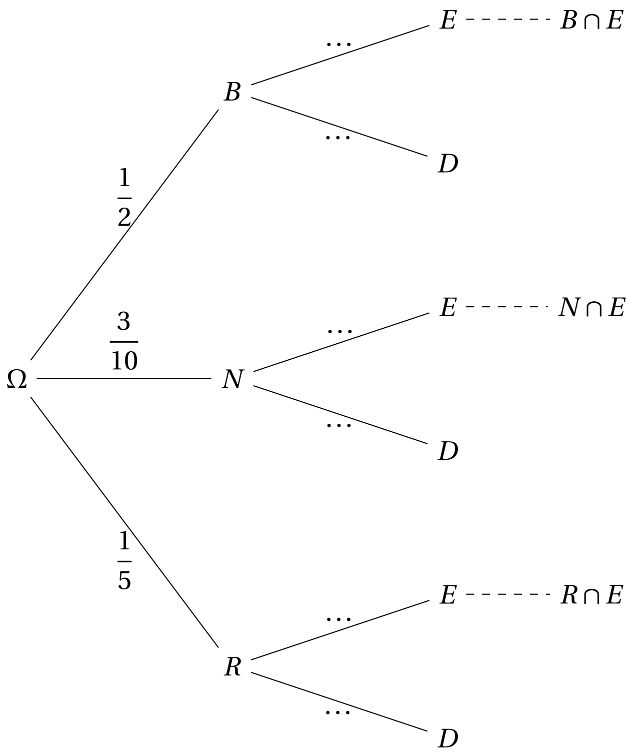
- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(N) = \dfrac{3}{10}$
- $\mathbb{P}(R) = \dfrac{1}{5}$

On sait que ce collectionneur a deux types de voitures, des essences et des diesel. On note l'événement :

$E$ : « La voiture choisie est essence »

Le collectionneur nous assure de plus :

- $\mathbb{P}_B(E) = \dfrac{1}{10}$
- $\mathbb{P}_N(E) = \dfrac{1}{4}$
- $\mathbb{P}_R(E) = \dfrac{2}{5}$



On souhaite maintenant connaître la probabilité de choisir une voiture essence.
Étant donné que $\{B, N, R\}$ forment une **système complet d'événement** (démontré dans l'exemple précédent) on a d'après la **formule des probabilités totales** que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E\cap B)+\mathbb{P}(E\cap N)+\mathbb{P}(E\cap R)\\ &= \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}_B(E)+\mathbb{P}(N)\times\mathbb{P}_N(E)+\mathbb{P}(R)\times\mathbb{P}_R(E)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\\ &= \frac{41}{200}=0,205\end{aligned}$$

**À savoir faire 4 : Système complet d'événement et formule des probabilités totales**

On étudie une population dans laquelle une personne peut être dans **exactement un** des trois états suivants :

- $E_1$ : « La personne est en bonne santé. » ;
- $E_2$ : « La personne est malade d'une maladie légère » ;
- $E_3$ : « La personne est malade d'une maladie grave »

On applique un test $T$ (positif=le test réagit), on sait de plus que 80% de la population est en bonne santé et parmis eux 5% ont un test qui réagit positif. De même, 15% de la population est atteint d'une maladie légère et parmi eux 40% ont un test qui réagit positivement. Pour finir, 95% des personnes ayant une maladie grave ont un test positif.
Déterminer la probabilité qu'on choisisse une personne ayant un test positif.

................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................
................................................................................................................................................

# Partie III Indépendance

**Définition 9 : Indépendance**

Soient $A$ et $B$ deux événements d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$.
On dit que les événements $A$ et $B$ sont **indépendants** si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

**À savoir faire 5 : Démontrer l'indépendance de deux événements**

On considère une urne contenant six boules numérotées de 1 à 6.
On considère les événements :

- $A$ : « Le nombre obtenu est pair » ;
- $B$ : « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 5 » .

1. Décrire par une phrase l'événement $A \cap B$, puis déterminer sa probabilité.

   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................

2. Les événements $A$ et $B$ semblent-ils indépendants ?

   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................

3. Justifier par calculs l'affirmation précédente.

   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................
   ...............................................................................................................

**Propriété 4 : Probabilité conditionnelle et indépendance**

Soient $A$ et $B$ deux événements non impossibles.
$A$ et $B$ sont indépendants si, et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

**À retenir :** On comprend ici que la réalisation de l'événement $A$ n'influence pas la réalisation ou non de l'événement $B$.

***Démonstration :***

Considérons deux événements non impossibles $A$ et $B$.
$\boxed{\Rightarrow}$ D'une part, si $A$ et $B$ sont indépendants, on a alors par définition :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Or on sait que : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(A)$ ainsi :

$$\mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Comme $A$ n'est pas un événement impossible on a : $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et donc :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ on a alors :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

D'où $A$ et $B$ sont indépendants. ■

# Partie IV Exercices

## A - Rappels

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 1** (Tirage)

On considère l'expérience aléatoire suivante : « on tire au hasard une boule dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10 ». Considérons les expériences aléatoires suivantes :

- $A$ : « L'issue obtenue est un nombre pair » ;
- $B$ : « L'issue obtenue est supérieure ou égale à 8 » ;
- $C$ : « L'issue obtenue est strictement inférieure à 3 ».

1. Donner l'univers des possibles $\Omega$ de cette expérience aléatoire.
2. Lister les issues réalisant chaque événement.
3. Déterminer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
4. Lister les issues réalisant chacun des événements suivants :

   (a) $\overline{A}$ (b) $\overline{B}$ (c) $A \cap B$ (d) $A \cap C$ (e) $A \cup B$ (f) $A \cup C$

★☆☆☆☆ **EXERCICE 2** (Mélange d'événements)

Considérons $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ l'univers d'une expérience aléatoire et deux événements de cette expérience $A = \{2, 5\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$. Lister alors les issues qui réalisent chacun des événements suivants :

1. $\overline{A}$ 2. $A \cap B$ 3. $A \cup B$ 4. $A \cup \overline{B}$ 5. $\overline{A \cap B}$ 6. $\overline{A \cup B}$

★⯪☆☆☆ **EXERCICE 3** (Dé à 20 faces)

On lance un dé de 20 faces, numérotées de 1 à 20. On lance le dé et on note le numéro de la face en contact avec le sol. On note les éléments suivants :

- $A$ : « L'issue obtenue est un nombre pair » ;
- $B$ : « L'issue obtenue est un multiple de 3 » ;
- $C$ : « L'issue obtenue est inférieure ou égal à 8 ».
- $D$ : « L'issue obtenue est strictement supérieure à 12 ».

1. Déterminer $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(D)$.
2. Définir par une phrase, puis calculer la probabilité des événements suivants :

   (a) $A \cap B$ (b) $A \cap C$ (c) $B \cup C$

3. Déterminer $\mathbb{P}(C \cap D)$.

★★☆☆☆ **EXERCICE 4** (Deux lancers)

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, puis une pièce équilibrée dont les faces sont numérotées 1 et 2. On note les numéros obtenus.

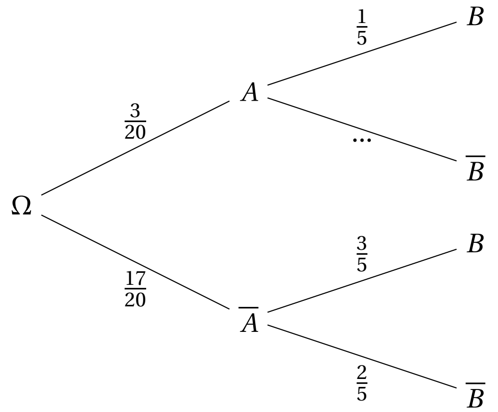
1. Représenter cette expérience aléatoire sous la forme d'un arbre.
2. Donner la probabilité associée à chaque issue de cette expérience aléatoire.

## B - Probabilités conditionnelles

Dans toute cette partie, on considère deux événements $A$ et $B$ d'un univers $\Omega$.

★★☆☆☆ **EXERCICE 5** (Arbre) ..........................................................................

Considérons l'arbre de probabilité représentant une certaine expérience aléatoire.




1. Déterminer $\mathbb{P}_A(B)$.
2. En déduire $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right)$.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 6** (Calculs de probabilités conditionnelles) ..........................................

1. On suppose que $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right)$.
2. On suppose que $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{8}$ et $\mathbb{P}_B(A) = \frac{5}{9}$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
3. On suppose que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{5}$ et $\mathbb{P}_B(A) = \frac{3}{4}$. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
4. On suppose que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}_A(B) = \frac{1}{5}$. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.

## C - Partition et probabilités totales

★★⯪☆☆ **EXERCICE 7** (Fin de l'**Exercice 5**) ..........................................................................

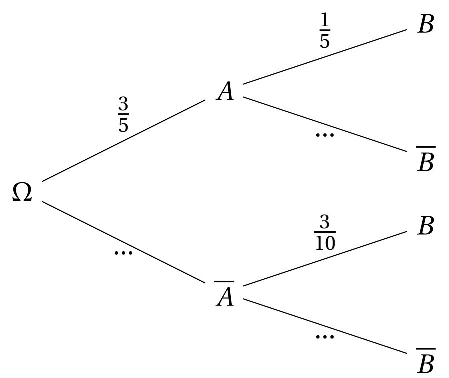
En reprenant l'expérience aléatoire traduit par l'arbre de probabilité de l'**exercice 5**, déterminer $\mathbb{P}(B)$.

★★⯪☆☆ **EXERCICE 8** (Partition) ..........................................................................

On considère deux événements $A$ et $B$ d'un univers $\Omega$ tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}_A(B) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{5}$. Calculer $\mathbb{P}(B)$.

★★★☆☆ **EXERCICE 9** (Arbre et partition) ..........................................................................

On considère l'arbre de probabilités ci-dessous, quelle est la probabilité de l'événement $B$ ?



★★★⯪☆ **EXERCICE 10** (Un problème d'appel) ........................................................................

Une société de service souhaite faire une enquête de satisfaction au niveau des personnes ayant recours à leurs services. Cette société possède deux centres d'appels : un situé à Lyon et l'autre à Paris. L'enquête consiste à appeler des clients et leurs demander s'ils sont satisfaits ou non de la prestation.
La société estime que 58% des appels émis l'ont été depuis le centre d'appel de Lyon, de plus parmi ces appels on constate que 34% des personnes se disent satisfaites. Au centre de Paris constate un taux de 44% de personnes satisfaites.
On choisit au hasard une personne ayant été téléphoné et on considère les événements suivants :

- $L$ : « la personne a été appelé par le centre de Lyon » ;
- $S$ : « la personne est satisfaite du service proposé ».

1. (a) Établir un arbre de probabilité illustrant la situation.
   (b) Déterminer la probabilité que la personne ait été téléphoné par le centre de Lyon et soit satisfaite.
   (c) Montrer que la probabilité que la personne ayant été téléphoné soit satisfaite est $p = 0,382$.
2. Sachant que la personne ayant été téléphoné a été satisfaite, quelle est la probabilité que cette personne ait été téléphoné depuis Paris ? Arrondir au millième.

★★★☆☆ **EXERCICE 11** (Naissance) ........................................................................

Dans une population, on estime qu'il naît 51% de garçons et 49% de filles.
Dans cette population, si le premier enfant d'une famille est une fille, dans 75% des cas il y a un deuxième enfant.
Si le premier enfant est un garçon, il y a un deuxième enfant dans 20% des cas.
On choisit, au hasard dans cette population, une famille ayant au moins un enfant. On considère les événements suivants :

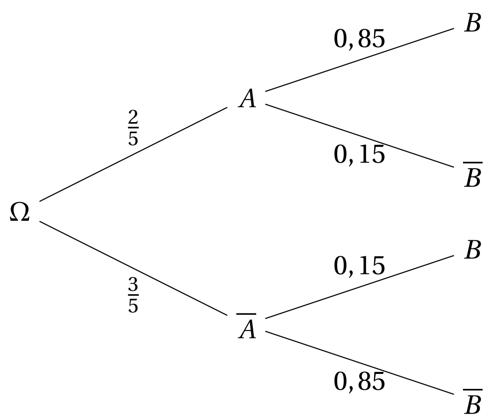
- $F$ : « le premier enfant de cette famille est une fille » ;
- $D$ : « cette famille a eu un deuxième enfant » .

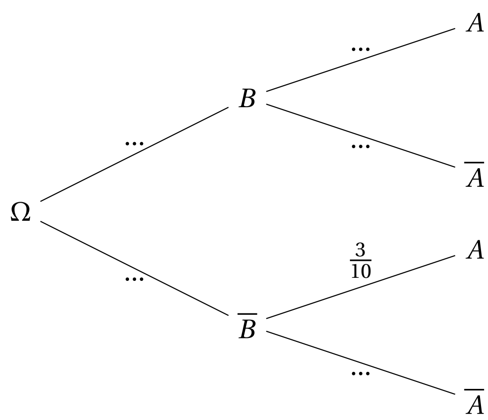
1. Déterminer la probabilité que la famille choisie ait au moins deux enfants et que le premier soit une fille.
2. Déterminer $\mathbb{P}(B)$.

★★★☆☆ **EXERCICE 12** (Arbres) ........................................................................

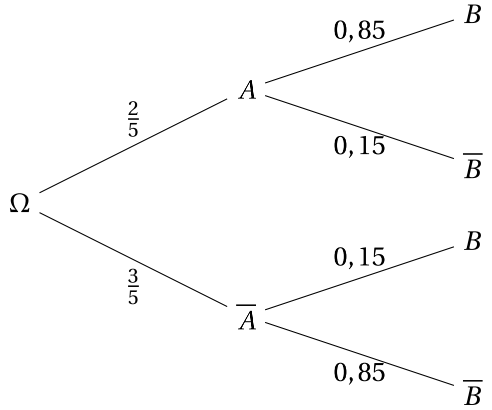
Dans chaque cas compléter les arbres en utilisant les données du premier.
*On justifiera soigneusement.*

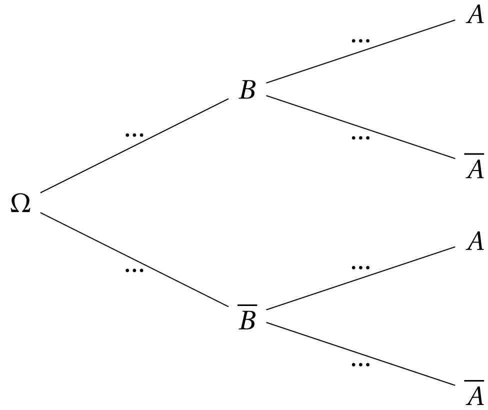
1. 



2.




## D - Indépendance

★★⯪☆☆ **Exercice 13** (Calculs et étude d'indépendance)

Soient $A$ et $B$ deux événements d'un même univers Ω. Dans chaque cas on étudiera l'indépendance des événements $A$ et $B$.

1. Pour $A$ et $B$ tels que : $\mathbb{P}(A)=\dfrac{3}{4}$, $\mathbb{P}(B)=\dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(A\cup B)=\dfrac{5}{6}$.
2. Pour $A$ et $B$ tels que : $\mathbb{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B)=\dfrac{2}{5}$ et $\mathbb{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{10}$.
   Puis déterminer :
   (a) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A\cup B)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}_A(B)$.
   (d) Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.
3. Pour $A$ et $B$ tels que : $\mathbb{P}(A)=\dfrac{2}{5}$, $\mathbb{P}(B)=\dfrac{3}{5}$ et $\mathbb{P}_A(B)=\dfrac{1}{5}$.
   Puis déterminer :
   (a) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(A\cap B)$.
   (d) Calculer $\mathbb{P}(A\cup B)$.
4. Pour $A$ et $B$ tels que : $\mathbb{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}_A(B)=\dfrac{3}{5}$ et $\mathbb{P}_B(A)=\dfrac{4}{5}$.
   Puis déterminer :
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A\cap B)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(B)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)$.
   (d) Calculer $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$.

★★★☆☆ **Exercice 14** (Indépendance ?)

Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants sachant que :

1. $\mathbb{P}(A)=\dfrac{1}{5}$, $\mathbb{P}(B)=\dfrac{7}{10}$ et $\mathbb{P}(A\cap B)=0,14$ ;
2. $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=0,35$, $\mathbb{P}(B)=0,25$ et $\mathbb{P}(A\cap B)=0,163$ ;
3. $\mathbb{P}(\overline{A})=\mathbb{P}(B)=0,15$ et $\mathbb{P}(A\cup B)=0,9775$ ;
4. $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)=\dfrac{3}{10}$ et $\mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B})=0,14$ ;

★★★⯪☆ **EXERCICE 15** (Indépendance et événements) ....................

Démontrer que $A$ et $B$ sont deux événements indépendants si, et seulement si, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

★★★☆☆ **EXERCICE 16** (Condition d'indépendance et plus encore) ....................

Soient $A$ et $B$ deux événements d'un même univers $\Omega$ tels que : $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $\mathbb{P}(B) = p$ avec $0 \leq p \leq 1$.
Calculer $p$ dans les cas suivants :

1. $A$ et $B$ sont indépendants ;
2. $A$ et $B$ sont incompatibles ;
3. $A$ est une partie de $B$.

## E - Problèmes

★★★☆☆ **EXERCICE 17** (Fruits) ....................

Lors d'une promotion, un hypermarché vend par paquets d'un kilogramme des clémentines et des oranges, en provenance de l'Union Européenne (Italie, Espagne) et du Maroc.
Le nombre de fruits mis en vente est donné par le tableau suivant :

| *Fruits* \ *Origine* | Italie | Espagne | Maroc |
|---|---|---|---|
| Clémentine | 100 | 250 | 200 |
| Orange | 350 | 450 | 650 |

1. Un acheteur pressé prend au hasard un paquet de fruits. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

   (a) $C$ : « Acheter des clémentines »

   (b) $I$ : « Acheter italien »

2. (a) Quelle est la probabilité d'acheter des clémentines, sachant que l'acheteur ne veut que des produits européens ?

   (b) Quelle est la probabilité d'acheter européen, sachant que des clémentines ont été choisies ?

★★★⯪☆ **EXERCICE 18** (Choix de spécialités) ....................

On s'intéresse aux élèves ayant choisi les spécialités Mathématiques, Physique-Chimie et SI. On considère les événements suivants :

- $M$ : « l'élève abandonne la spécialité Mathématiques en classe de terminale » ;
- $PC$ : « l'élève abandonne la spécialité Physique-Chimie en classe de terminale » ;
- $S$ : « l'élève abandonne la spécialité SI en classe de terminale » ;

De plus on sait que :

- 8% des élèves abandonnent la spécialité Physique-Chimie ;
- 10% des élèves abandonnent la spécialité SI ;
- Les filles représentent :
  - ▶ 65% des abandons de la spécialité Mathématiques ;
  - ▶ 50% des abandons de la spécialité Physique-Chimie ;
  - ▶ 55% des abandons de la spécialité SI.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. On choisit un éléve au hasard.

(a) Déterminer la probabilité que cet élève soit une fille abandonnant la spécialité SI.

(b) Déterminer la probabilité que l'élève soit un garçon.

(c) Déterminer la probabilité que cet élève soit un garçon ou abandonne la spécialité Physique-Chimie.

(d) Déterminer la probabilité que cet élève abandonne la spécialité Mathématiques sachant que c'est un garçon.

★★★★☆ **EXERCICE 19** (Choix de langues) ........................................

On s'intéresse au choix de langue vivante des élèves de première. Le lycée propose trois langues : l'anglais ($A$), l'espagnol ($E$) et l'italien ($I$) et on dénombre :

- 256 élèves inscrits en anglais ;
- 220 élèves inscrits en espagnol ;
- 95 élèves inscrits en italien ;
- 184 élèves inscrits en anglais et en espagnol ;
- 76 élèves inscrits en anglais et en italien ;
- 25 élèves inscrits en espagnol et en italien ;
- 21 élèves inscrits dans les trois langues.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn (diagramme en patate...).
2. On choisit un élève au hasard :
   (a) Déterminer la probabilité que cet élève soit inscrit uniquement en italien ;
   (b) Déterminer la probabilité que cet élève soit inscrit uniquement en anglais et en espagnol ;
   (c) Déterminer la probabilité que cet élève soit inscrit en anglais en italien ;
   (d) Déterminer la probabilité que cet élève soit inscrit uniquement en espagnol sachant qu'il est inscrit en italien.

★★★★✯ **EXERCICE 20** (Pour finir) ........................................

On considère deux événements $A$ et $B$ d'un même univers $\Omega$, tels que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{7}{8} \quad \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = \frac{3}{8}$$

Calculer : $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$ et $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$.