

Du nombre dérivé à la fonction dérivée

Plan du chapitre

I	Approche intuitive de la notion de limite	2
II	Nombre dérivé	3
	A - Taux de variation d'une fonction	3
	B - Tangente à une courbe (construction intuitive)	4
	C - Dérivabilité locale	7
	D - Équation de la tangente	10
III	Fonction dérivée	12
	A - Dérivabilité sur un intervalle	12
	B - Dérivées usuelles	14
	C - Opérations sur les fonctions dérivées	15
IV	Exercices	25
	A - Taux de variation	25
	B - Nombre dérivé	25
	C - Tangente à courbe	27
	D - Calculs de dérivées	27
	E - Un peu de logique	29
	F - Problèmes	30

Introduction

Partie I Approche intuitive de la notion de limite

La notion de limite est incontournable pour appréhender la notion de dérivée, c'est pourquoi dans ce cours nous allons tenter de donner une approche intuitive de la limite.

Exemple :

Considérons un nombre réel x et $f(x)$ son image par la fonction carré ($f(x) = x^2$).

Imaginons que notre nombre x varie et se rapproche de 3 (on dira que **x tend vers 3**). Légitimement on peut se demander vers quelle valeur va se rapprocher $f(x)$?

On arrive facilement à comprendre que $f(x)$ se rapproche alors de (c'est-à-dire **$f(x)$ tend vers**).

On dira plus formellement que :

Cette phrase peut-être condensé en une notation :

.....

La flèche du bas : $x \rightarrow 3$ signifie

⚠ Attention : Ne pas confondre.

On ne confondra pas $x \rightarrow 3$ et $x \mapsto 3$, la première signifie que « » donc le réel x varie et se rapproche de 3 autant que l'on veut. La seconde flèche

Ce ne sont pas les deux mêmes objets, malgré qu'elles se ressemblent leurs significations sont bien différentes.

✂ À savoir faire 1 : Premiers calculs de limite

Calculer chacune des limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 3 = \dots\dots\dots$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} 7 = \dots\dots\dots$

4. $\lim_{x \rightarrow -5} x^2 + 2x = \dots\dots\dots$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2 - 3x} = \dots\dots\dots$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 3}{4 - 6x} = \dots\dots\dots$

Définition 1 : Limite

On dit que $f(x)$ a pour **limite** un nombre L lorsque x tend vers le réel x_0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 .

On notera alors :

.....

et on lira :

On comprend assez intuitivement que lorsque « tout va bien », c'est-à-dire lorsque notre fonction n'a pas de « problème » en x_0 , on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple :

Regardons un cas où « tout ne va pas bien », où notre fonction f n'est pas définie en x_0 .
Regardons par exemple la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1) - 1}{x}$$

Si on note $f : x \mapsto \frac{(x^2 + 1) - 1}{x}$, f n'étant pas définie en 0 on ne peut pas déterminer son image par f .
Intéressons nous aux valeurs de $f(x)$ lorsque x tend vers 0, pour cela voici un tableau de valeurs :

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x tend vers 0.
On peut alors conjecturer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1) - 1}{x} = \dots\dots$$

Partie II Nombre dérivé**A - Taux de variation d'une fonction**

Dans toute cette partie on considère une fonction :

$$\begin{array}{lcl} f : \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et deux nombres réels distincts a et $b \in \mathcal{D}_f$.

Définition 2 : Taux de variation

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le nombre :

$$T_f(a, b) = \dots\dots\dots$$

Exemple :

En considérant que f est la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$, on a :
le taux de variation de la fonction carré entre 2 et 3 est :

$$T_f(2, 3) = \dots\dots\dots$$

Propriété 1 : Interprétation géométrique

Soient $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ deux points distincts de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

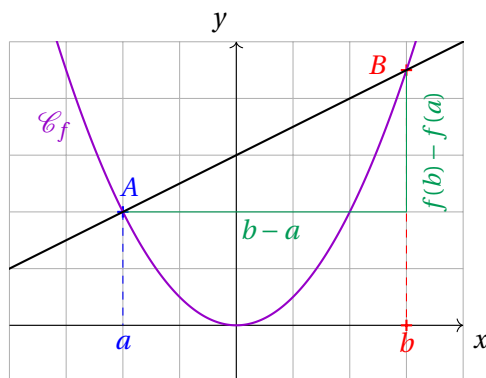
Le taux de variations de f entre a et b est

Démonstration :

En effet,

$$T_f(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Or on sait que le quotient $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, pour deux points distincts A et B , donne le coefficient directeur directeur de la droite (AB) . ■

Taux de variations de la fonction carré entre a et b **i Information :** Différence entre taux de variation et taux d'accroissement ?

Il n'y a pas de différence entre les deux, si ce n'est le contexte. On parle de taux d'accroissement pour la pente d'une droite donc pour le quotient $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Et de taux de variation d'une fonction pour le quotient : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

✂ À savoir faire 2 : Taux de variation

Déterminer le taux de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ entre 1 et 4.
Interpréter géométriquement ce résultat.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

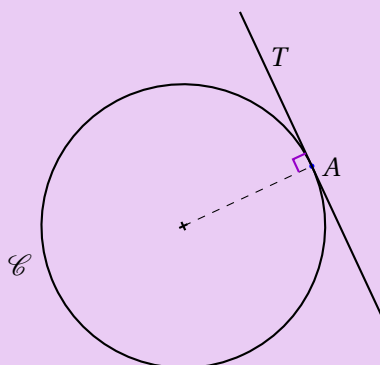
.....

.....

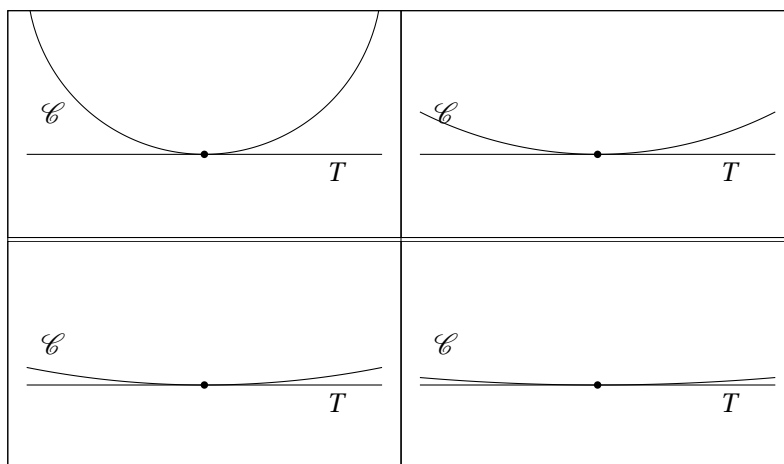
.....

B - Tangente à une courbe (construction intuitive)**Définition 3 : Tangente à un cercle**

La **tangente** à un cercle $\mathcal{C}$ est
On sait qu'elle est également perpendiculaire au rayon issue du point de tangence A .



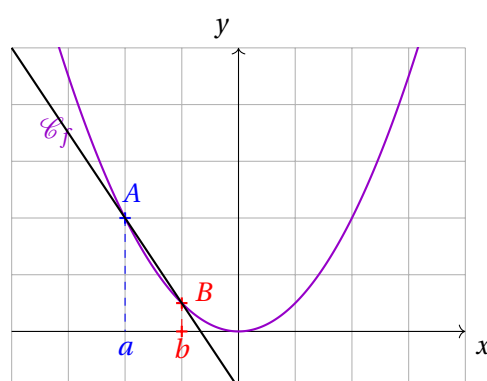
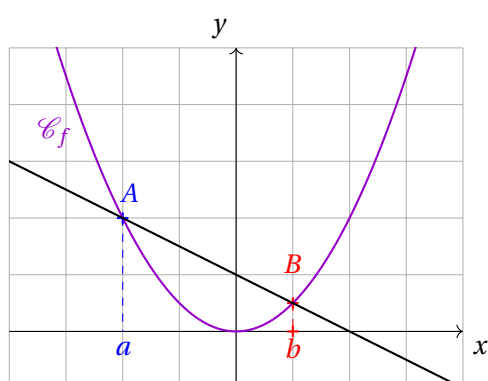
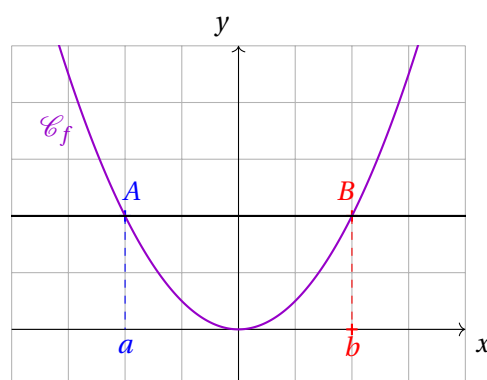
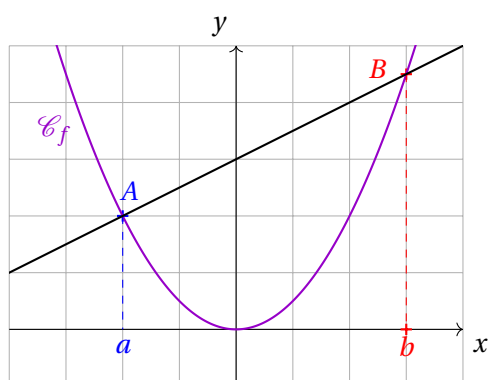
En zoomant autour du point de tangence, on observe que plus l'agrandissement augmente, plus le cercle $\mathcal{C}$ et la tangente T paraissent se confondre. Autour du point A , le cercle peut donc être approximé par sa tangente. Il faut toutefois rester vigilant : cette propriété est locale, non globale ! Le cercle et sa tangente sont très proches dans un voisinage immédiat de A , mais ils deviennent rapidement très différents dès que l'on s'en éloigne.



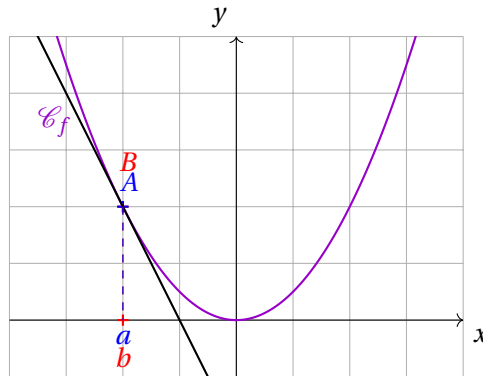
Information : C'est ce phénomène qui nous a longtemps laissé croire que la Terre était plate. Cette propriété exceptionnelle, que l'on peut confondre localement le cercle à une droite, qui nous pousse à chercher des tangentes à une courbe afin de nous faciliter l'étude des fonctions.

Construction : Si l'on souhaite construire la tangente à une courbe $\mathcal{C}_f$ en un point A .

On va considérer un point $B \in \mathcal{C}_f$ mobile le long de $\mathcal{C}_f$ et la sécante (AB) . L'objectif est de faire tendre le point B vers le point A :



Jusqu'à obtenir :



On voit alors que la droite (AB) pivote autour de A pour finir lorsque l'abscisse b se rapproche fortement de l'abscisse a vers une droite que l'on appellera la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A .

Ici, il est clair qu'il y a un passage à la limite le réel $b \rightarrow a$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est la droite limite des sécantes (AB) lorsque $b \rightarrow a$.

Ce qui nous intéressera par la suite sera le coefficient directeur limite de cette tangente.

Voici une vidéo illustrant la construction que l'on vient de faire.



C - Dérivabilité locale

Définition 4 : Nombre dérivé

Si $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale au point d'abscisse a , on dit que
Le coefficient directeur de cette tangente s'appelle et on le note
(se lit « f prime de a ») et on a :

.....

À retenir : Pour justifier la formule donnant le nombre dérivé de f en a . Comme le coefficient directeur de la sécante (AB) où $B \in \mathcal{C}_f$ est donné par :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On dira alors que sera
....., donc
D'où on a l'égalité :

.....

Propriété 2 : Dérivabilité

f est **dérivable en a** si, et seulement si,

Exemple :

Montrons que la fonction carré, f , est dérivable en 1 et calculons son nombre dérivé en 1 : $f'(1)$.
Pour cela montrons que : est une valeur finie.

Commençons par déterminer $\frac{f(b) - f(1)}{b - 1}$:

$$\frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Comme $b \rightarrow 1$, c'est-à-dire b va se rapprocher autant que possible de 1 sans être égale à 1, donc $b - 1 \neq 0$.
Ainsi :

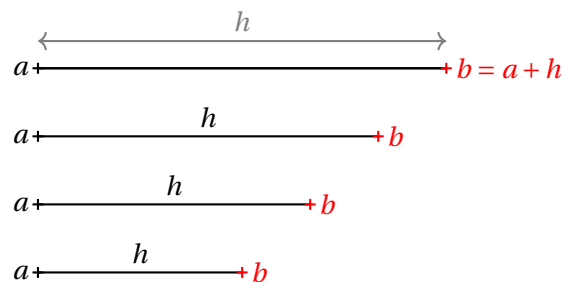
$$\frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = \dots\dots\dots$$

Donc :

$$\lim_{b \rightarrow 1} \frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

D'où f est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est égal à ..., ce qui veut dire que

Pour simplifier les calculs de limite, nous pouvons redéfinir le calcul le nombre dérivé de f en a .
Pour cela il faut remarquer que : b tend vers a si, et seulement si, la distance de a à b tend vers 0.



Ainsi en notant h la distance de a à b ($h = b - a$) on peut alors noter b de la façon suivante :

$$b = a + h$$

Dans ce cas on a bien que :

$$b \rightarrow a \text{ si, et seulement si } h \rightarrow 0$$

On peut alors redéfinir le nombre dérivé pour simplifier le nombre dérivé :

Propriété 3 : Nombre dérivé

Lorsque f est dérivable en a , on a :

.....

Exemple :

En utilisant cette propriété retrouvons le résultat de l'exemple précédent.
Déterminons, tout d'abord on a :

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Ainsi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dots\dots\dots = \dots\dots$$

✂ À savoir faire 3 : Calcul de nombres dérivés

1. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ en 0.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x - 1$ en 2.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ en 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Information : Les fonctions sont-elles toutes dérivables en tout point de leur domaine définition ?

La réponse est non, il existe de nombreuses fonctions qui ne sont pas dérivables en des points où elles sont pourtant définies.

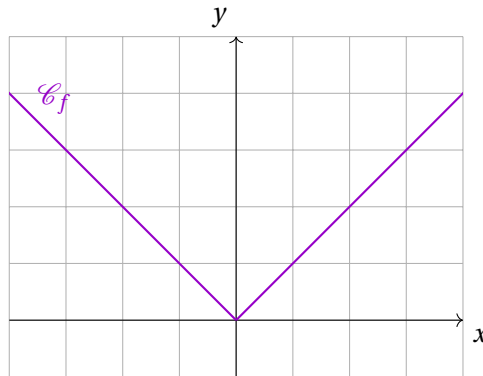
L'exemple le plus connu est celui de la fonction valeur absolue.

Exemple :

Considérons la fonction valeur absolue :

$$\begin{aligned} ||: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sa courbe représentative est la suivante :



Il semblerait que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 n'ait pas le même coefficient directeur que l'on arrive en 0 par la droite (c'est-à-dire avec des valeurs positives) que par la gauche (c'est-à-dire avec des valeurs négatives). Donc on peut conjecturer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Démontrons le :

Pour cela, déterminons $\frac{|0+h|-|0|}{h}$ pour $h > 0$ puis $h < 0$:

- **Cas $h > 0$:** On a :

$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \dots\dots\dots$$

- **Cas $h < 0$:** On a :

$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \dots\dots\dots$$

Ainsi on a :

.....

D'où et la fonction valeur absolue

À retenir : On retiendra qu'une fonction dérivable en un point ne présente pas d'« angle » en ce point. Ce qui n'est pas le cas de la fonction valeur absolue en 0.

D - Équation de la tangente

On sait déjà par définition que le coefficient directeur de la tangente (non verticale) à $\mathcal{C}_f$ en $A(a, f(a))$ est $f'(a)$. Il nous reste à déterminer l'ordonnée à l'origine de notre tangente.

Théorème 1 : Équation de la tangente

Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

La tangente $T_{f,a}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite :

$$T_{f,a} : \dots\dots\dots$$

Démonstration :

[illegible]

💡 **À retenir :** En pratique on retiendra surtout comment on détermine l'ordonnée à l'origine de notre tangente.

Example :

Déterminons l'équation de la tangente à la courbe de la fonction carré au point d'abscisse 1.

On sait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est
 D'après les exemples précédents on sait que :

$$f'(1) = \dots$$

Ainsi on sait déjà que :

$$T_{f,1} : \dots\dots\dots$$

Par définition de la tangente, on sait que donc
, c'est-à-dire :

..... =

⇔ =

⇔ =

⇔ =

Ainsi l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1 est :

$$T_{f,1} : \dots\dots\dots$$

Propriété 4 : Tangente horizontale

Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$,
 $\mathcal{C}_f$ possède une tangente horizontale au point d'abscisse a si, et seulement si,

À savoir faire 4 : Déterminer l'équation d'une tangente

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f: x \mapsto x^2 - 2x$ au point d'abscisse 0.

.....

.....

.....

.....

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x - 1$ au point d'abscisse 2.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 1.

Partie III Fonction dérivée

A - Dérivabilité sur un intervalle

Définition 5 : Dérivabilité sur un intervalle

Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ une partie de $\mathcal{D}_f$.

On dit que f est **dérivable sur I** si

Exemple :

Étudions le domaine dérivabilité de la fonction carré.

Considérons un réel a et étudions la dérivabilité de la fonction carré en a .

Pour cela, commençons par déterminer :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a que est une valeur finie. Donc on vient de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est une valeur finie, c'est-à-dire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ f est dérivable en a .
D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

! Attention : Une fonction n'est pas obligatoirement dérivable en tout point de son domaine de définition. En effet nous avons vu l'exemple de la valeur absolue définie en 0 mais non dérivable en 0.

Pour f une fonction dérivable sur un intervalle I , on associe à tout $a \in I$ le réel noté :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Associé une valeur à un réel, c'est On définit
..... de la façon suivante : pour tout a tel que
on associe

$$f' : a \mapsto \dots\dots\dots$$

Définition 6 : Fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur I une partie de $\mathcal{D}_f$.

On appelle **fonction dérivée** de f sur I la fonction notée f' tel que : pour tout $x \in I$:

$$\dots\dots\dots$$

où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x .

Exemple :

On vient de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction carré f était dérivable en a tel que :

$$f'(a) = \dots\dots\dots$$

On vient alors de déterminer l'expression algébrique de la fonction de la dérivée de la fonction carré. La fonction dérivée f' de la fonction carré est la fonction :

$$\begin{array}{ccc} f' : & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto f'(x) = \dots\dots\dots \end{array}$$

Voici un tableau donnant l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions usuelles. Ce tableau est à connaître par cœur.

Famille	$f(x)$	Domaine de définition	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
Constante	k			
Affine	$ax + b$			
Carré	x^2			
Cubique	x^3			
Puissance ($n \in \mathbb{N}$)	x^n			
Racine carrée	$\sqrt{x}$			
Inverse	$\frac{1}{x}$			
Puissance inverse	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$			

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

- $$\begin{array}{lll} 1. f_1 : x \mapsto 1 & 4. f_4 : x \mapsto \frac{2(x+2)}{\pi} & 6. f_6 : x \mapsto x^{-2} \\ 2. f_2 : x \mapsto 0 & & \\ 3. f_3 : x \mapsto -x+3 & 5. f_5 : x \mapsto x^5 & 7. f_7 : x \mapsto \frac{1}{x^{14}} \end{array}$$

[illegible]

C - Opérations sur les fonctions dérivées

Maintenant que nous connaissons les dérivées des fonctions usuelles, amusons-nous avec les opérations élémentaires.

C.1 - Somme

Propriété 5 : Somme

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , la fonction $f + g$ est dérivable sur I , et on a :

$$(f + g)' = \dots\dots\dots$$

Information : L'égalité $(f + g)' = f' + g'$ est une égalité de fonctions (sur I), c'est-à-dire que :

$$\text{Pour tout } x \in I, (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^4 + 2x + 5$,

Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = u(x) + v(x)$ où

$$u : x \mapsto \dots\dots\dots \text{ et } v : x \mapsto \dots\dots\dots$$

Ainsi $f = u + v$ (égalité de fonctions).

Comme fonctions polynomiales u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors comme
..... f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

À savoir faire 6 : Dériver une somme

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto x^3 + \frac{x}{2} + 6$

2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$

3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x} + 2x + x^7$

C.2 - Produit par un réel

Propriété 6 : Produit par un réel

Soient $k \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I , la fonction kf est dérivable sur I , et on a :

$$(kf)' = \dots\dots\dots$$

Information : La fonction kf est tout simplement la fonction $x \mapsto kf(x)$.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \frac{5}{x}$,

Pour $x \in \mathbb{R}$ on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = 5g(x)$ où

$$g : x \mapsto \dots\dots\dots$$

Comme g est dérivable sur $\dots\dots\dots$, alors f est dérivable sur $\dots\dots\dots$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

À savoir faire 7 : Produit par un réel

1. $f_1 : x \mapsto 2\sqrt{x}$

3. $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{3x^2}$

5. $f_5 : x \mapsto \frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^7}$

2. $f_2 : x \mapsto \pi x^{-5}$

4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{2x}$

6. $f_6 : x \mapsto 2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$

C.3 - Produit

Propriété 7 : Produit

Soient u et v une fonction dérivable sur I , la fonction uv est dérivable sur I , et on a :

$$(uv)' = \dots\dots\dots$$

Information : La fonction uv est tout simplement la fonction $x \mapsto u(x)v(x)$.

Erreur fréquente : À partir d'ici les formules se compliquent...

Attention ici nous n'avons pas :

$$\cancel{(uv)' = u'v'}$$

Pour s'en convaincre, voici une explication rapide :

pour toute fonction f on a $f' = \dots\dots\dots$ où $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$

Si cette formule était vraie on aurait alors :

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Et cela peu importe la fonction... ce qui est évidemment faux.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x\sqrt{x}$,

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = u(x)v(x)$ où

$$u : x \mapsto \dots\dots\dots \text{ et } v : x \mapsto \dots\dots\dots$$

Comme u et v sont dérivables sur $\dots\dots\dots$, alors f est dérivable sur $\dots\dots\dots$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

À savoir faire 8 : Dériver un produit

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto (x^5 + 2x^2 + 3)(x^3 + 2)$

2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{5x}{9}} \times 2x^{-2}$

C.4 - Quotient

Propriété 8 : Inverse

Soit f une fonction dérivable sur I tel que pour tout $x \in I$:, la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I , avec :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \dots\dots\dots$$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$,
 f est définie sur $\mathbb{R}$ car

Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ où

$$g : x \mapsto \dots\dots\dots$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

✚ À savoir faire 9 : Dériver l'inverse d'une fonction

Donner l'expression $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

Pour l'instant on se souciera pas du domaine de dérivation

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x^3 + x^4}$

$$2. \ f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}}$$

This image shows a full page of a notebook or worksheet. It features approximately 20 horizontal rows of small, evenly spaced dots, designed to guide handwriting. The dots are arranged in straight lines across the width of the page, leaving a small margin at the top. The background is plain white.

Propriété 9 : Cas général

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I tels que pour tout $x \in I$:, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , avec :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dots\dots\dots$$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 1}$,

f est définie sur $\mathbb{R}$ car

Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où :

$$u : x \mapsto \dots \quad \text{et} \quad v : x \mapsto \dots$$

Comme $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable comme fonction quotient sur, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

✂ À savoir faire 10 : Dériver d'un quotient

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x-4}{x-5}$

$$2. f_2: x \mapsto \frac{\frac{1}{x} + 3}{2 - \frac{3}{x}}$$

[illegible]

C.5 - Composée avec une fonction affine

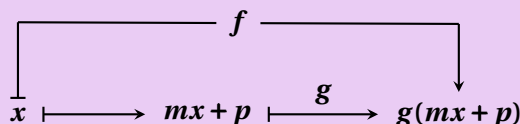
Définition 7 : Composée avec une fonction affine

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$,

On dit que f est définie sur $\mathcal{D}_g$ avec si et :

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

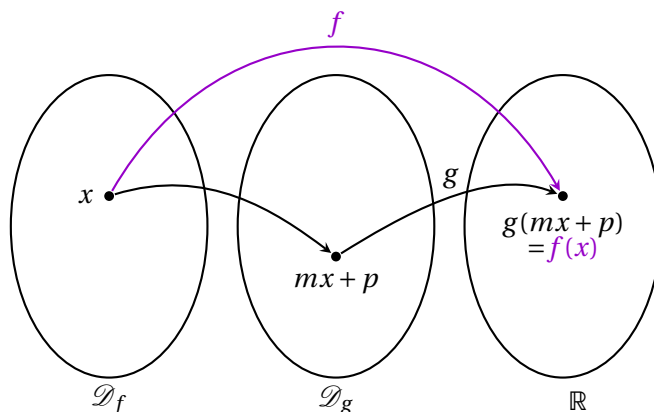
La situation se représente ainsi :

**À retenir : Les ensembles**

Concernant les domaines de définitions il faut retenir que :

Pour $x \in \mathcal{D}_f$ (comme on veut calculer $f(x)$) il faut que $mx + p \in \mathcal{D}_g$ (comme on veut calculer $g(mx + p)$).

Ce schéma résume le tout :

**Exemple :**

La fonction $f : x \mapsto (2x + 5)^2$ définie sur $\mathcal{D}_f$, est la composée d'une fonction g et d'une fonction affine. En effet en posant $g : x \mapsto \dots\dots$ on a clairement pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = g(2x + 5)$$

De plus g est clairement définie sur $\mathbb{R}$, et on a bien pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $mx + p \in \mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

À savoir faire 11 : Reconnaître la composition

Pour chacune des fonctions f suivantes, reconnaître les fonctions g et affines $x \mapsto mx + p$ tels que :

$$f(x) = g(mx + p)$$

On pourra également donner le domaine de définition de chacune des fonctions f .

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2x-3}$

2. $f_2 : x \mapsto (-3x-5)^3$

3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{-2x+5}$

4. $f_4 : x \mapsto \frac{x+2}{(x+4)^2+3}$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is a vertical margin line on the left side, creating a narrow left margin. The paper appears to be from a notebook or a standard ruled document.

Propriété 10 : Dérivée d'une composée avec fonction affine

Soient g une fonction dérivable sur I et J un intervalle.

Si pour tout $x \in J$, $mx + p \in I$ (avec $m, p \in \mathbb{R}$) **alors** la fonction f définie sur J par $f(x) = g(mx + p)$ est dérivable sur J , tel que pour tout $x \in J$:

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Example :

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$,

On remarque que f est la composée de la fonction $g : x \mapsto \dots\dots\dots$ et de la fonction affine $x \mapsto \dots\dots\dots$

Comme g est dérivable sur $]\frac{1}{2}, 1[$, il nous faut déterminer l'ensemble des points x tels que :

Or on a:

..... >

$\Leftrightarrow$ >

$\Leftrightarrow$ >

Ainsi la fonction f est dérivable sur et pour ces valeurs de x on a :

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

✂ À savoir faire 12 : Dériver une composée avec une fonction affine

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2x-3}$

3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{-2x+5}$

2. $f_2 : x \mapsto (-3x - 5)^3$

4. $f_4 : x \mapsto \frac{x+2}{(x+4)^2+3}$

On pourra s'intéresser au domaine de dérivabilité de chacune de ces fonctions.

[illegible]

Partie IV Exercices

A - Taux de variation

★★☆☆☆ EXERCICE 1 (Taux de variation #1) ⌚

Dans chaque cas déterminer le taux de variation de f entre a et b :

1. $f_1 : x \mapsto 4x + 3$ avec $a = -2$ et $b = 5$.
2. $f_2 : x \mapsto 3x^2$ avec $a = 1$ et $b = 3$.
3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x}$ avec $a = 3$ et $b = 6$.
4. $f_4 : x \mapsto x^2 + x$ avec $a = 2$ et $b = 4$.

★★★☆☆ EXERCICE 2 (Taux de variation #2) ⌚

Dans chaque cas déterminer le taux de variation de f entre a et b , en fonction de a et b :

1. $f_1 : x \mapsto 2x + 5$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_2 : x \mapsto 3 - 6x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $f_3 : x \mapsto \frac{3}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
4. $f_4 : x \mapsto 3x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

★★★☆☆ EXERCICE 3 (Sécante #1) ⌚

Soient $f : x \mapsto x^2 - 3x + 7$, définie sur $\mathbb{R}$, et deux points A et B de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 2 et 8. Déterminer l'équation réduite de la sécante (AB) .

★★★☆☆ EXERCICE 4 (Sécante #2) ⌚

Soient $f : x \mapsto 5x + \frac{1}{x+1}$, définie sur $\mathbb{R}_+$, et trois points A, B et C de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 1 et 3. Déterminer l'équation réduite des sécantes (AB) et (AC) .

B - Nombre dérivé

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Nombre dérivé et dérivabilité) ⌚

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$,

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est égale à $-\frac{1}{3(3+h)}$ pour $h \neq 0$ et $h \neq -3$.
3. En déduire que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

★★★☆☆ EXERCICE 6 (Nombre dérivé) ⌚

Dans chaque cas déterminer le nombre dérivé de f en a :

1. $f_1 : x \mapsto 4x + 3$ avec $a = -2$.
2. $f_2 : x \mapsto 3x^2$ avec $a = -1$.
3. $f_3 : x \mapsto x^2(2+5x)$ avec $a = 4$.
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x}$ avec $a = 2$.

★★☆☆☆ EXERCICE 7 (Coefficient directeur) ⌚

Dans chaque cas déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a :

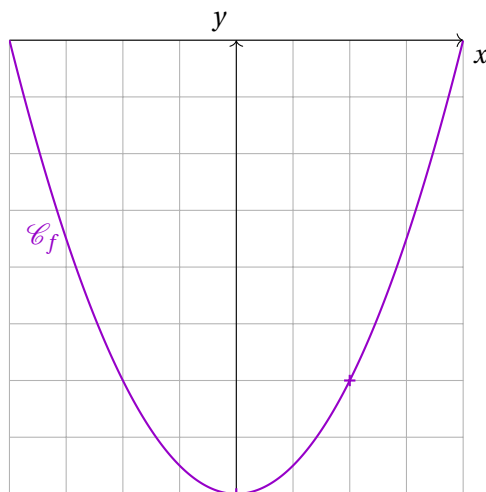
1. $f_1 : x \mapsto 2x + 5$ avec $a = -2$.
2. $f_2 : x \mapsto x^2 - 4$ avec $a = -2$.

★★★☆☆ EXERCICE 8 (Parallèle?) ⌚

Soient $f : x \mapsto \frac{5}{x}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses a et $-a$ sont parallèles.

★★★☆☆ EXERCICE 9 (Graphique #1) ⌚

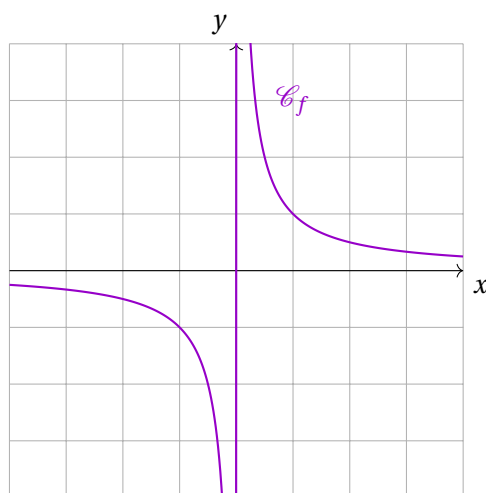
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[-4, 4]$.



1. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 sachant que $f'(2) = 2$.
2. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -4 sachant que $f'(-4) = -4$.
3. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 sachant que $f'(0) = 0$.

★★★☆☆ EXERCICE 10 (Graphique #2) ⌚

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

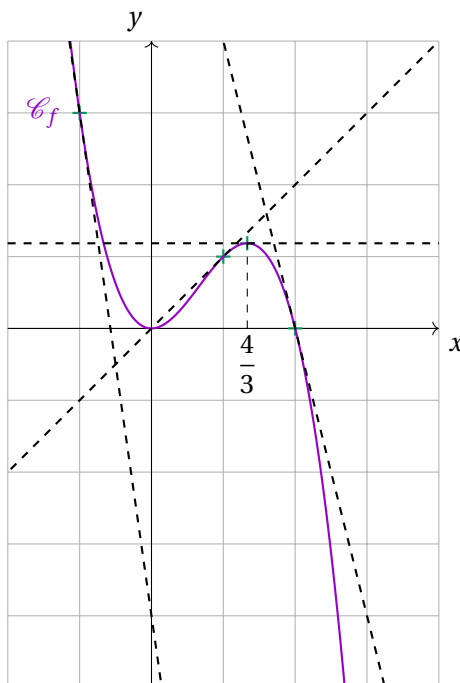


1. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 sachant que $f'(-2) = \frac{1}{2}$.
2. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 sachant que $f'(1) = -1$.
3. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sachant que $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

C - Tangente à courbe

★★★☆☆ EXERCICE 11 (Graphique #3)..... (⌚)

Soit f définie et dérivable sur $[-3, 5]$, dont on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.



- Déterminer graphiquement $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
- Déterminer par lecture graphique $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'\left(\frac{4}{3}\right)$ et $f'(2)$.
- Donner l'équation des tangentes à la courbe au point d'abscisse 2 puis -1 puis 1.

★★☆☆☆ EXERCICE 12 (Tangente en un point) (✓)

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 6x$ est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2 .
Déterminer $f'(-2)$ et $f(-2)$.

★★★★☆ EXERCICE 13 (Tangentes) (⌚)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe par les points $A(-4, 11)$, $B(2, 4)$ et $C(6, 2)$. Les nombres dérivés de f en -4 , en 2 et en 6 sont respectivement égaux à $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$.
On appelle alors T_A , T_B et T_C les tangentes à $\mathcal{C}_f$ respectivement en A , B et C .

- Déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes T_A , T_B et T_C .
- Les tangentes T_A , T_B et T_C sont-elles concourantes? Si oui, en quel point?

D - Calculs de dérivées

★★☆☆☆ EXERCICE 14 (B.a-ba) (✓)

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|--|
| 1. $f_1 : x \mapsto x^3$ | 3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x}$ | 5. $f_5 : x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)^{11}$ |
| 2. $f_2 : x \mapsto \pi x - 7$ | 4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{x^6}$ | 6. $f_6 : x \mapsto (4x)^3$ |

★★☆☆☆ EXERCICE 15 (Somme et produit par un réel) ⌚

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto x^3 + x^2 + \frac{1}{x} - 2x + 5$

3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

5. $f_5 : x \mapsto \frac{2x}{3} - \frac{3}{4x}$

2. $f_2 : x \mapsto -(9x - 5) + \sqrt{x}$

4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{8x}$

6. $f_6 : x \mapsto x^{-4} - x^4$

★★★★☆☆ EXERCICE 16 (Produit) ⌚

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto (3x + 5)(1 - x)$

3. $f_3 : x \mapsto \left(\frac{7}{x^4} - 2x^{-2}\right)\left(5x^4 + \frac{1}{x}\right)$

2. $f_2 : x \mapsto 2(-x^2 + 5x - 8)(3x^2 + 7)$

4. $f_4 : x \mapsto x\sqrt{x}$

★★★★★ EXERCICE 17 (Quotient) ⌚

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{3x - 5}$

4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{3x + 5x^3 + 7x^5}$

7. $f_7 : x \mapsto \frac{\sqrt{2x} - x}{x^2 + 5x^{-3}}$

2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$

5. $f_5 : x \mapsto \frac{x + 2}{5x - 3}$

8. $f_8 : x \mapsto \frac{\frac{1}{x} + 2}{\sqrt{3x}}$

3. $f_3 : x \mapsto \frac{3}{4\sqrt{x} + x^{-2}}$

6. $f_6 : x \mapsto \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 2x + 1}$

★★★★★ EXERCICE 18 (Composée avec une fonction affine) ⌚

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{5x + 2}$

3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{-9x + 8}$

5. $f_5 : x \mapsto (3x + 5)^4$

2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{-9x + 8}$

4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{(2x + 1)^3}$

6. $f_6 : x \mapsto (-x + 2)^{-3}$

★★★★☆☆ EXERCICE 19 (Composition affine #1) ⌚

On considère une fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2x} - 3x + 5$ et deux fonctions g et h tels que :

$$g : x \mapsto f(x - 2) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto f(1 + 2x)$$

1. Que vaut $g(x)$? $h(x)$?

2. Que vaut $g'(x)$? $h'(x)$?

★★★★☆☆ EXERCICE 20 (Composition affine #2) ⌚

On considère une fonction f , définie par $f : x \mapsto \frac{2x}{3x^2 + 1}$ et deux fonctions g et h tels que :

$$g : x \mapsto f(x - 2) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto f(1 + 2x)$$

1. Que vaut $g(x)$? $h(x)$?

2. Que vaut $g'(x)$? $h'(x)$?

★★★☆☆ EXERCICE 21 (Composition affine #3) ⌚

On considère une fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \frac{2}{x} + x$ et deux fonctions g et h tels que :

$$g : x \mapsto f(x-2) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto f(1+2x)$$

1. Que vaut $g(x)$? $h(x)$?
2. Que vaut $g'(x)$? $h'(x)$?

★★★☆☆ EXERCICE 22 (Composition affine et dérivabilité) ⌚

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x+8}$

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f .
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f .
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 puis 5 .

★★★☆☆ EXERCICE 23 (Un peu de physique) ⌚

On considère que la position d'un objet M dans un repère orthonormé au cours du temps est donné par une fonction de t (le temps) :

$$f : t \mapsto t^3 - 2t^2 + 7$$

La dérivée de la position $f(t)$, par rapport à t , donne la vitesse instantanée, $v(t)$, de notre objet. La dérivée de sa vitesse instantanée, $v(t)$, donne l'accélération, $a(t)$, de notre objet.

1. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération de M au temps $t = 0$.
2. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération de M au temps $t = 1$.

E - Un peu de logique...

★★★☆☆ EXERCICE 24 (Quantificateurs) ⌚

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par l'expression $f(x) = \frac{1}{x}$.
Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse. Justifier.

1. Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) < 0$.
2. Il existe un nombre réel $x \neq 0$ tel que $f'(x) = -1$.
3. Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) \geq -1$.

★★★☆☆ EXERCICE 25 (Implications) ⌚

f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Si les fonctions f et g sont égales, alors elles ont la même fonction dérivée.
2. Si les fonctions f et g ont la même fonction dérivée, alors elles sont égales.
3. Si pour tout nombre réel x , $f(x) - g(x) = 1$ alors les fonctions f et g ont la même dérivée.

F - Problèmes

★★★★☆ EXERCICE 26 (Approximation affine) (L)

Considérons f la fonction racine carrée. On se propose de déterminer une fonction affine $x \mapsto ax + b$ telle que la fonction $h \mapsto f(1+h) - (ah+b)$ ait pour limite 0 lorsque h tend vers 0.

On dira alors que cette fonction affine est **une approximation affine** de f au voisinage de 1.

1. Déterminer $f'(1)$.
2. Justifier que pour h proche de 0 avec $h \neq 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \simeq \frac{1}{2}$$

3. En déduire l'approximation affine :

$$\sqrt{1+h} \simeq 1 + \frac{h}{2} \quad \text{pour } h \text{ proche de } 0$$

4. En déduire, sans l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de :

(a) $\sqrt{1,02}$

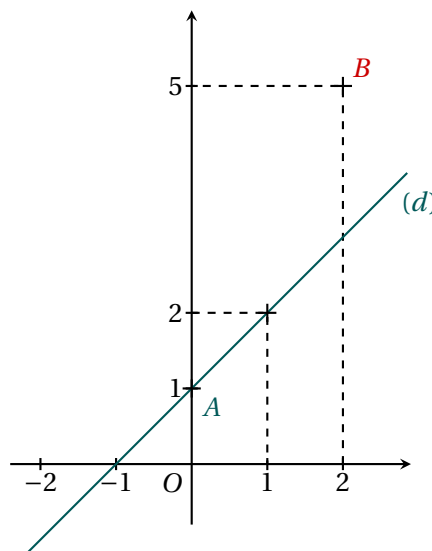
(b) $\sqrt{0,996}$

★★★★☆ EXERCICE 27 (L)

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

La droite (d) , représenté ci-dessous, est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $A(0, 1)$ et $\mathcal{C}_f$ passe par le point $B(2, 5)$. Déterminer alors l'expression de $f(x)$.



★★★★☆ EXERCICE 28 (Tangentes communes) (L)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 1$$

Déterminer les tangentes communes aux deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Préciser pour chacune d'elles le point de contact avec chaque courbe.

★★★★☆ EXERCICE 29 (Famille de courbes) ①

Pour tout nombre réel non nul a , on note $\mathcal{P}_a$ la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction :

$$f: x \mapsto ax^2 + (1 - 2a)x + 2$$

Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{P}_a$ passent par un même point E et qu'elles ont une tangente commune en ce point.

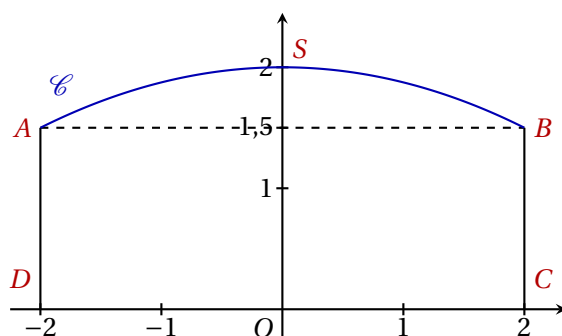
★★★★★ EXERCICE 30 (Parité) ②

Considérons f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est paire, alors sa fonction dérivée f' est impaire.
2. Démontrer que si f est impaire, alors sa fonction dérivée f' est paire.

★★★★☆ EXERCICE 31 (BAC 2017 – Amérique du Nord) ③

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure, selon le schéma ci-dessous.



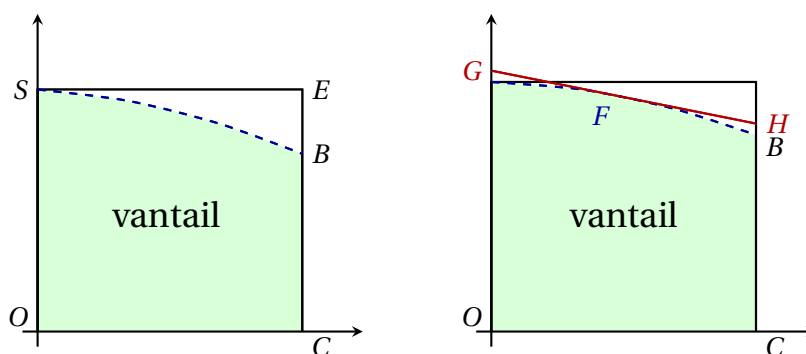
L'unité du repère représente 1 mètre.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction :

$$\begin{aligned} f: [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

avec a, b et c des nombres réels avec $a \neq 0$.

1. (a) La tangente à $\mathcal{C}$ au point S d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses. Justifier que $f'(0) = 0$ et en déduire la valeur de b .
- (b) À l'aide des informations $f(0) = 2$ et $f(2) = 1,5$, déterminer les valeurs de a et c . En déduire, que pour tout $x \in [-2, 2]$: $f(x) = -0,125x^2 + 2$.
2. (a) Vérifier que f est une fonction paire.
- (b) Interpréter cette propriété.
3. Pour découper les vantaux du portail, le fabricant découpe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un carré $OCES$, soit un trapèze $OCGH$ comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point F d'abscisse 1.



Quelle est la forme la plus économique ?

VRAI OU FAUX ?

a) Si $f'(a) = 0$, alors $f(a) = 0$.☐ ☐b) Le nombre dérivé de $f(x) = x^2$ en $x = 3$ est égal à 9.☐ ☐c) Le nombre dérivé de $f(x) = x^3$ en $x = 2$ est égal à 12.☐ ☐d) La dérivée de x^5 est $5x^4$.☐ ☐e) La dérivée de $\sqrt{x}$ est $\frac{1}{\sqrt{x}}$.☐ ☐f) La dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$.☐ ☐g) La dérivée de $x^3 + 2x - 1$ est $3x^2 + 2$.☐ ☐h) La dérivée de $x^4 - \sqrt{x}$ est $4x^3 - \sqrt{x}$.☐ ☐i) La dérivée de $x(x^2 + 1)$ est $3x^2 + 1$.☐ ☐j) La dérivée de $(2x + 1)(x^2 - 3)$ est $2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x$.☐ ☐k) La dérivée de $\frac{1}{x+2}$ est $\frac{1}{(x+2)^2}$.☐ ☐l) La dérivée de $\frac{x}{x+1}$ est $\frac{1}{(x+1)^2}$.☐ ☐m) La dérivée de $\frac{x^2}{x+1}$ est $\frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2}$.☐ ☐



n) La dérivée de $(3x - 1)^5$ est $5(3x - 1)^4$.

☐ ☐

o) La dérivée de e^{2x+3} est $2e^{2x+3}$.

☐ ☐

p) La dérivée de $\sqrt{5x-1}$ est $\frac{1}{2\sqrt{5x-1}}$.

☐ ☐

q) La dérivée de $\frac{1}{7x-2}$ est $-\frac{7}{(7x-2)^2}$.

☐ ☐

r) Si $f(2) = 5$ et $f'(2) = 3$, alors une équation de la tangente est $y = 3x + 5$.

☐ ☐

s) Si $f(1) = 4$ et $f'(1) = -2$, alors une équation de la tangente est $y = -2x + 6$.

☐ ☐

t) Deux courbes ayant le même nombre dérivé en un point ont nécessairement la même tangente.

☐ ☐

u) Si une tangente est horizontale en un point, alors le nombre dérivé en ce point est nul.

☐ ☐