

Étude des polynômes du second degré

Plan du chapitre

I	Résolution d'une équation du second degré	2
II	Factorisation et étude de signes	5
III	Somme et produit de racines	9
IV	Gagner du temps grâce aux racines évidentes	11
V	Exercices	14
	A - Second degré	14
	B - Factorisation et étude de signe	14
	C - Somme et produit de racines	15
	D - Racines évidentes	15
	E - Pour aller plus loin	16
	F - Un peu de logique	17
	G - Problèmes	17

Introduction

Dans la première partie du chapitre, nous avons étudié les fonctions polynômes du second degré et leurs différentes formes d'écriture. Nous allons maintenant nous intéresser aux équations du second degré, c'est-à-dire aux équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$. Résoudre une telle équation revient à chercher les valeurs de x pour lesquelles le polynôme s'annule : ces valeurs sont appelées les racines du polynôme. Le but de cette partie sera donc de déterminer ces racines, lorsqu'elles existent, et de comprendre dans quels cas une équation du second degré admet zéro, une ou deux solutions réelles.

Partie I Résolution d'une équation du second degré

Définition 1 : Équation du second degré

Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Exemple :

L'équation $-2x^2 + 3x - 1 = 0$ est une équation du second degré.

Définition 2 : Discriminant

On appelle **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemple :

Le discriminant associé à l'équation du second degré précédente est égale à :

$$\begin{aligned}\Delta &= 3^2 - 4 \times (-2) \times (-1) \\ &= 9 - 8 \\ &= 1\end{aligned}$$

Propriété 1 : Solutions

Considérons Δ le discriminant associé à l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$;

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution réelle ;
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple :

En reprenant la même équation du second degré que les exemples précédents, on sait que le discriminant

de cette équation est : $\Delta = 1 > 0$ ainsi on sait que cette équation admet deux solutions distinctes qui sont :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times (-2)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times (-2)} \\x_1 &= \frac{-4}{-4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2}{-4} \\x_1 &= 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation du second degré considérée au départ est : $\mathcal{S} = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$

💡 À retenir : Le principe de la preuve

L'idée de la preuve de cette propriété est simple, jusqu'ici pour résoudre des équations du second degré comme

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Vous utilisiez sans cesse la factorisation pour appliquer la propriété du produit nul. Ici nous allons faire de même, nous allons chercher à factoriser notre polynôme du second degré pour obtenir une équation produit nul pour ensuite déterminer facilement les solutions de notre équation.

Démonstration (à connaître) :

Considérons l'équation du second degré suivante : $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Cherchons à factoriser le polynôme : $ax^2 + bx + c$. Dans le premier chapitre sur les polynômes du second degré, nous avons commencé à factoriser ces fonctions en passant par la forme canonique associée. Ainsi on a :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

On reconnaît ici $\Delta = b^2 - 4ac$;

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Ainsi l'équation : (E) est équivalente à :

$$\begin{aligned}a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= 0 \quad \text{car } a \neq 0\end{aligned}$$

Plusieurs cas s'offrent à nous :

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admet aucune solution en effet :

$$(E) \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Or cette dernière équation n'admet aucune solution car $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$.

On a alors : $\mathcal{S} = \emptyset$

- Si $\Delta = 0$ alors de la même manière que précédemment on a :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}\end{aligned}$$

Ainsi l'équation (E) possède comme ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$

- Si $\Delta > 0$ alors $\sqrt{\Delta}$ est définie, on a alors :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0 \end{aligned}$$

Comme **équation produit nulle**, on a alors :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de notre équation (E) est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

✂ À savoir faire 1 : Résoudre des équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $4x + 1 = 3x^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $2x(x+1) = x^2 + 3x$

Définition 3 : Racines

Pour une fonction polynomiale de degré deux, $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont aussi appelées **racines de la fonction f** .

À retenir : Racine double

Dans le cas où $\Delta = 0$, on appelle l'unique solution de notre équation **racine double** de notre fonction polynomiale du second degré

Exemple :

Les racines du polynôme $P(x) = x^2 - 2x - 4$ sont :

.....

.....

.....

Partie II Factorisation et étude de signes

La démonstration précédente montre un peu plus que l'existence (ou non) de solution pour une équation du second degré donnée elle montre même qu'un polynôme du second degré peut être factorisé dans certains cas. En effet dans les cas où $\Delta \geq 0$, nous avons pu donner une forme factorisée de notre polynôme du second degré.

- $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$ où $\Delta = b^2 - 4ac$, ce qui est la forme factorisée de notre polynôme;
- $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$, ce qui est la forme factorisée de notre polynôme.

Théorème 1 : Factorisation

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.

Le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ se factorise éventuellement de la façon suivante :

- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de notre polynôme ;
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de notre polynôme ;
- Si $\Delta < 0$, alors notre polynôme n'a pas de forme factorisée sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Voir démonstration précédente

À retenir : Si a est une racine d'un polynôme P alors P est factorisable par $x - a$.

Exemple :

En reprenant l'exemple suivi tout au long du chapitre, factorisons le trinôme : $-2x^2 + 3x - 1$.

On a vu que $\Delta = 1 > 0$, donc notre polynôme est bien factorisable. De plus, nous avons vu qu'il admettait deux racines réelles distinctes qui sont :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

On obtient alors la forme factorisée suivante :

$$-2x^2 + 3x - 1 = -2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Erreur fréquente : Il ne faut pas oublier de mettre le coefficient quadratique en facteur !

À savoir faire 2 : Factoriser des polynômes du second degré

Factoriser dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

1. $P_1 : x \mapsto 3x^2 + 11x - 4$ **À corriger**
2. $P_2 : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$ **À corriger**
3. $P_3 : x \mapsto 2x^2 + 5x + 6$ **À corriger**

Information : Comme nous l'avons déjà vu en seconde, l'utilité principale d'une forme factorisée est d'étudier le signe d'une fonction polynomiale. En effet :

Dans le cas où $\Delta > 0$, on a alors notre fonction polynomiale f qui admet une forme factorisée telle que : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de f . On a alors, (ici on va supposer que $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	signe(a)			
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
Signe de $f(x)$	signe(a) 0 -signe(a) 0 signe(a)			

Théorème 2 : Signe

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré.

Le signe de cette fonction dépend **du signe du discriminant** et **du signe de a , le coefficient quadratique** :

- Si $\Delta > 0$, alors la fonction polynomiale est **du signe de a sur $] -\infty, x_1[\cup] x_2, +\infty[$ et du signe contraire de a sur $] x_1, x_2[$;**
- Si $\Delta = 0$, alors la fonction polynomiale est **toujours du signe de a , elle s'annule sans changer de signe**;
- Si $\Delta < 0$, alors la fonction polynomiale est **toujours du signe de a , sans s'annuler**.

À retenir : On retiendra que :

- Si $\Delta > 0$ alors notre polynôme est **du signe de a à l'extérieur de ses racines**;
- Si $\Delta = 0$ alors notre polynôme est **toujours du signe de a** . Il s'annule sans changer de signe, en son unique racine;
- Si $\Delta < 0$ alors notre polynôme est **toujours du signe de a , sans s'annuler**.

Exemple :

Toujours en conservant la même fonction polynomiale du second degré, $P : x \mapsto -2x^2 + 3x - 1$.

Nous avons vu que les racines de notre polynôme sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ (on fera attention ici : $x_1 > x_2$!).

De plus le signe du coefficient quadratique est négatif, donc par le théorème précédent on a alors :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
Signe de $P(x)$		0	0	

À savoir faire 3 : Résoudre des inéquations du second degré

- Résoudre l'inéquation : $3x^2 - 2x + 1 \geq 0$

Comme $\Delta = -8 < 0$, et que notre coefficient quadratique est positif, on peut alors affirmer d'après le théorème que notre pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2x^2 + 3x - 1 > 0$ ainsi $S = \mathbb{R}$

- Résoudre l'inéquation : $-3x^2 - x + 2 \leq 0$

Les deux racines sont -1 et $\frac{2}{3}$ ainsi d'après le théorème précédent on sait que notre polynôme est du signe de -3 sur $] -\infty, -1[\cup] \frac{2}{3}, +\infty[$ ainsi on a $S =] -\infty, -1[\cup] \frac{2}{3}, +\infty[$

Démonstration :

Considérons la fonction polynomiale suivante $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$;

En utilisant la remarque précédente nous allons utiliser la forme factorisée de P pour étudier le signe de notre fonction sur $\mathbb{R}$. Celle-ci dépend du signe du discriminant, Δ , associé à notre polynôme.

- Si $\Delta > 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1, x_2 sont les racines de P . On peut supposer sans perte de généralité que $x_1 < x_2$, dans ce cas on a :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	$\text{signe}(a)$		$\text{signe}(a)$	$\text{signe}(a)$
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
Signe de $P(x)$	$\text{signe}(a)$		0	$\text{signe}(a)$

- Si $\Delta = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de P .
Dans ce cas on a :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
a	signe(a)		signe(a)
$(x - x_0)^2$	+	0	+
Signe de $P(x)$	signe(a)		0 signe(a)

- Si $\Delta < 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x) = a \underbrace{\left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\text{positif}} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{négatif}} \right)}_{\text{positif}}$, d'où $P(x)$ est du signe de a pour

tout $x \in \mathbb{R}$

■

Partie III Somme et produit de racines

Commençons par énoncé un théorème qui peut paraître évident mais qui est primordial pour cette partie.

Théorème 3 :

Soient deux fonctions polynomiales du second degré f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ et } g(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

$$\text{Si pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a : } f(x) = g(x) \text{ alors : } \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$$

🔗 **À retenir :** Ce théorème nous dit que si deux fonctions polynomiales sont égales sur tout $\mathbb{R}$ alors leurs coefficients sont égaux.

On pourra même restreindre le théorème en assurant seulement que les deux fonctions polynomiales sont égales en trois points distincts, cela suffirait.

Démonstration :

Laisser à la volonté du lecteur.

Indice : Si nous avons l'égalité pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous l'avons en particulier pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$ ■

Grâce à ce théorème construisons ensemble le suivant :

Considérons une fonction polynomiale du second degré de discriminant positif, définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On a montré que nous pouvons écrire l'expression de f par : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines de f , quitte à ce que : $x_1 = x_2$ (dans le cas d'une racine double, $\Delta = 0$).

En développant, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= ax^2 - axx_1 - axx_2 + ax_1x_2 \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \end{aligned}$$

Comme nous avons l'égalité de deux fonctions polynomiales du second degré sur tout $\mathbb{R}$, on a alors d'après le théorème précédent :

$$\begin{cases} a = a \\ b = -a(x_1 + x_2) \\ c = ax_1x_2 \end{cases}$$

En notant S la somme des deux racines de f et P le produit des deux racines f , on a alors :

$$\begin{cases} b = -aS \\ c = aP \end{cases}$$

On peut alors écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - aSx + aP \\ &= a(x^2 - Sx + P) \end{aligned}$$

On voit alors que pour un polynôme du second degré unitaire (c'est-à-dire ayant un coefficient quadratique égal à 1) ou alors en factorisant par son coefficient quadratique, on a que le coefficient linéaire est égal à l'opposé de la somme des racines de notre polynôme du second degré et le coefficient constant est égal au produit des racines de notre polynôme du second degré.

Voyons sur un exemple l'utilité de cette remarque :

Exemple :

Considérons le polynôme du second degré définie par $f(x) = 2x^2 + x - 3$.

- D'une part : 1 est une racine que l'on appellera **évidente**, car :

$$f(1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$S = 1 + x_2 \quad \text{et} \quad P = 1 \times x_2 = x_2$$

où S et P sont respectivement la somme et le produit des racines de f .

- Or on vient de voir que l'on a :

$$\begin{cases} 1 = -2 \times S \\ -3 = 2 \times P \end{cases}$$

$$\text{Donc } -3 = 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}$$

On détermine ainsi facilement la seconde racine de notre polynôme.

Théorème 4 : Lien coefficients-racines

Deux réels u et v sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ si, et seulement si, **ces deux réels ont pour somme $u + v = S$ et pour produit $uv = P$**

✂ À savoir faire 4 : Utiliser le lien coefficients-racines

Déterminons les racines de la fonction polynomiale du second degré définie par $P(x) = x^2 + 4x - 5$

1. Trouver une racine évidente de notre polynôme.

1

2. En utilisant le lien coefficients-racines, déterminer la seconde racine de notre polynôme.

Comme f est unitaire on sait que le produit des racines de f est tel que :

$$1 \times x_2 = -5$$

D'où $x_2 = -5$.

3. Factoriser P .

$$P(x) = (x - 1)(x + 5)$$

Démonstration :

En exercice. ■

Nous avons vu dans le dernier exemple, un exemple du sens direct du théorème, c'est-à-dire, nous cherchons deux réels (potentiellement égaux) qui sont solutions d'une certaine du second degré. Pour ça on utilise les coefficients de notre polynôme du second degré pour nous aider à résoudre cette équation.

Voyons maintenant un exemple du sens indirect du théorème, cherchons deux réels qui ont pour somme S et produit P alors pour cela nous allons résoudre une certaine équation.

Exemple :

Résolvons le système, que l'on appelle somme-produit, suivant :

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ xy = 210 \end{cases}$$

Pour que deux nombres x et y aient pour somme 29 et produit 210, il faut et il suffit que ces deux nombres soient solution de l'équation **$x^2 - 29x + 210 = 0$.**

Le calcul du discriminant s'avère positif, il existe donc deux réels ayant pour somme 29 et pour produit 210.

Ainsi en résolvant notre équation du second degré, on trouve que 14 et 15 ont comme somme 29 et produit 210.

On a alors $\mathcal{S} = \{(14, 15); (15, 14)\}$

✂ À savoir faire 5 : Résoudre un système somme-produit

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 851cm^2 et de périmètre 120cm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Partie IV Gagner du temps grâce aux racines évidentes

Cette partie est présente seulement pour vous rappeler que les outils de résolution d'équation du second degré que l'on a découvert dans ce chapitre, ne doivent pas vous faire oublier ceux que vous avez appris les années précédentes.

Le discriminant et le calcul de racines qui en découlent ne sont pas toujours le moyen le plus efficace pour résoudre une équation du second degré. Dans certains cas favorables, il n'est pas très utile d'utiliser cette méthode. À vous de les reconnaître :

- Si x (ou plus généralement kx) est facteur commun.

$$2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$$

en est un exemple, ici par une simple factorisation on détermine que **0** et **3** sont racines de notre polynôme.

- Si notre polynôme est sous la forme d'une identité remarquable :

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

de la même manière, ici il est inutile de faire appel au discriminant, notre polynôme admet comme racine double : **2**.

- La partie précédente nous apporte une, autre, manière de déterminer facilement des racines. En effet en prenant sur un exemple :

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 1$$

- Il est évident ici que **1** est racine;
- Je factorise donc par le coefficient quadratique de f :

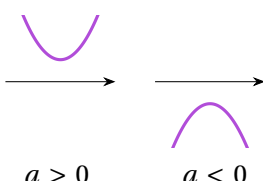
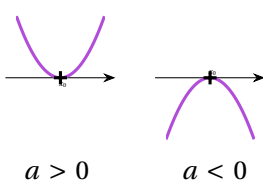
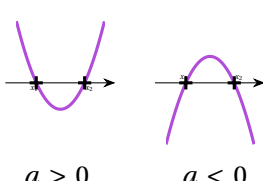
$$f(x) = 4 \left(x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} \right)$$

- On sait que le produit des deux racines de notre polynôme est égal à : $P = \frac{1}{4}$
- Si on note x_2 la seconde racine (éventuellement égale à x_1) de f , on a alors : $1 \times x_2 = P$ c'est-à-dire $x_2 = \frac{1}{4}$.

De manière générale, pour un polynôme du second degré de la forme : $ax^2 + bx + c$, si x_1 est racine évidente, puisque le produit des deux racines est égal : $P = \frac{c}{a}$ (et que la somme $S = -\frac{b}{a}$), on obtient alors la seconde racine x_2 par un calcul simple : $x_2 = \frac{P}{x_1}$ si $x_1 \neq 0$, sinon $x_2 = S - x_1$. Ce que l'on appelle une racine évidente est une valeur dont il est facile à vérifier qu'elle annule ou non le polynôme ; cela peut être : 0, 1, -1, 2, -2 (voire 3 ou $\frac{1}{2}$ pour les plus courageux d'entre vous).

Attention il faut garder en tête que cette méthode est là uniquement pour gagner du temps et éviter des erreurs de calculs sur la méthode du discriminant, il ne faut donc pas insister avec des valeurs trop nombreuses ou trop compliquées concernant les racines évidentes !

Tableau récapitulatif

	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Tableau de signes de $P(x) = ax^2 + bx + c$	Forme factorisée de $P(x) = ax^2 + bx + c$	Position relative de la parabole par rapport à l'axe des abscisses											
$\Delta < 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	signe de a		Pas de factorisation possible	 $a > 0$ $a < 0$					
x	$-\infty$	$+\infty$													
$P(x)$	signe de a														
$\Delta = 0$	Une solution dans $\mathbb{R}$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe de a	$P(x) = a(x - x_0)^2$	 $a > 0$ $a < 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$												
$P(x)$	signe de a	0	signe de a												
$\Delta > 0$	Deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $-a$</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	 $a > 0$ $a < 0$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$											
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a										

Partie V Exercices

A - Second degré

★★☆☆☆ EXERCICE 1 (Discriminant) ⌚

Calculer le discriminant et donner le nombre de solution de chacune des équations suivantes :

1. $x^2 - x + 1 = 0$

3. $5x^2 + 4x + 3 = 0$

2. $2x^2 - x + 3 = 0$

4. $x^2 - \sqrt{2}x + 7 = 0$

★★★☆☆ EXERCICE 2 (Équation du second degré) ⌚

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

6. $2x^2 + x + 4 = 0$

10. $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$

2. $x^2 - 4x + 4 = 0$

7. $-2x^2 + 5x + 3 = 0$

11. $-3x^2 - 6x - 3 = 0$

3. $x^2 + x + 1 = 0$

8. $-4x^2 + 12x - 9 = 0$

12. $\frac{x^2}{3} + x + 2 = 0$

4. $2x^2 - 3x + 1 = 0$

9. $5x^2 - 2x + 3 = 0$

5. $3x^2 + 6x + 3 = 0$

★★★☆☆ EXERCICE 3 (Équation) ⌚

Résoudre les équations suivantes :

1. $x(2x + 1) = x^2 - 3$

4. $x - \frac{1}{x} = 0$

7. $\frac{x^2 + 4x - 1}{x + 1} = 3x + 1$

2. $x^3 - 5x^2$

5. $\frac{x+1}{2} + \frac{1}{x-4} = 1$

8. $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x+2} = -\frac{5}{3}$

3. $\frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1} = 0$

6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = 4$

9. $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}$

B - Factorisation et étude de signe

★★☆☆☆ EXERCICE 4 (Racines) ⌚

Déterminer les racines de chacune des fonctions polynomiale suivante :

1. $f(x) = (x - 2)(x + 1)$

3. $f(x) = (2 - x)(1 - 3x)$

5. $f(x) = 4(2x + 7)^2$

2. $f(x) = (2x + 3)(x + 2)$

4. $f(x) = 2(x - 1)(x + 1)$

6. $f(x) = (x - 2)(1 - x)(-4x + 1)$

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Factorisation) ⌚

Factoriser, si possible, les trinômes suivants :

1. $f(x) = x^2 + x + 1$

3. $f(x) = x^2 - x - 1$

5. $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 9$

2. $f(x) = -x^2 + 3x + 9$

4. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

6. $f(x) = 4x^2 + 12x + 4$

★★★☆☆ EXERCICE 6 (Inéquation)..... (1)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 + x - 6 \geq 0$

3. $16x^2 - 40x + 25 \leq 0$

5. $-x^2 + 3x + 9 \geq 0$

2. $-2x^2 + 3x + 4 > 0$

4. $-5x^2 - 3x + 2 > 0$

6. $-3x^2 + 5x + 8 < 0$

★★★★☆ EXERCICE 7 (Inéquation #2) (1)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-5x^2 > (-3x + 1)(x + 2)$

3. $4(x - 3)^2 \geq (7 + 4x)^2$

2. $(x + 1)(x^2 + 3) > (x + 1)(5x - 3)$

4. $(-3x^2 + x + 2)(x + 3) \geq 0$

★★★★☆ EXERCICE 8 (La factorisation à la rescousse)..... (1)

Résoudre les équations suivantes en factorisant :

1. $(x + 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0$

4. $81 - (x^2 + 6x + 9) = 0$

2. $x^2 + 2x + 1 + (2x - 3)(x + 1) = 0$

5. $(3x - 1)(2x + 5) - (1 - x)(2x + 5) = 0$

3. $x^2 - 16 + (x + 4)(x - 6) = 0$

6. $(2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 = 0$

C - Somme et produit de racines

★★★☆☆ EXERCICE 9 (Somme et produit) (1)

Les trinômes suivants admettent tous des racines réelles. Donner dans chaque cas la somme et le produit de ces racines.

1. $f(x) = x^2 - x - 2$

3. $f(x) = -x^2 + 5x + 2$

5. $f(x) = -3x^2 + 11x + 7$

2. $f(x) = x^2 + 3x + 1$

4. $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$

★★★★☆ EXERCICE 10 (Systèmes) (1)

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 36 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 10 \end{cases}$

★★★★☆ EXERCICE 11 (Problème)..... (1)

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 126cm^2 et de périmètre : 50cm .

D - Racines évidentes

★★★☆☆ EXERCICE 12 (Recherche)..... (1)

Dans chaque cas, rechercher une racine évidente de la fonction polynomiale donnée.

1. $f(x) = x^2 + x - 2$

3. $f(x) = x^2 - x - 2$

5. $f(x) = -6x^2 - 10x + 4$

2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$

4. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

6. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

★★★☆☆ EXERCICE 13 (Résolution) ⌚

Considérons l'équation : $x^2 + 14x - 15 = 0$

1. Donner une solution évidente.
2. En utilisant la propriété du cours, déterminer la seconde racine.

★★★☆☆ EXERCICE 14 (Résolution #2) ⌚

En utilisant la méthode de l'exercice précédent, résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|----------------------|-----------------------|--|
| 1. $x^2 + x - 2 = 0$ | 3. $x^2 - x - 20 = 0$ | 5. $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1 = 0$ |
| 2. $x^2 - x - 2 = 0$ | 4. $2x^2 - x - 1 = 0$ | |

E - Pour aller plus loin

★★★★☆ EXERCICE 15 (Équation à paramètre) ⌚

Pour $m \in \mathbb{R}$, discuter du nombre de solutions des équations suivantes :

$$(E_1) : x^2 - mx - 3x + 3x + 1 = 0$$

$$(E_2) : mx^2 + (m - 1)x - 1 = 0$$

★★★★☆ EXERCICE 16 (Degré 3) ⌚

Considérons g la fonction polynomiale de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 10$$

1. Montrer que 2 est une racine évidente de g .
2. Déterminer des nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réels x :

$$g(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

★★★★☆ EXERCICE 17 (Degré 4) ⌚

Résoudre les équations suivantes en posant $X = x^2$

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| 1. $x^4 - 84x^2 + 243 = 0$ | 3. $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ |
| 2. $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$ | 4. $-x^4 + x^2 + 2 = 0$ |

★★★★★ EXERCICE 18 (Avec radical) ⌚

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------|--|
| 1. $x - 5\sqrt{x} - 14 = 0$ | 2. $\sqrt{x+5} = 1 - x$ | 3. $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 1}$ |
|-----------------------------|-------------------------|--|

F - Un peu de logique

★★★★☆ EXERCICE 19 (Quantificateur universel) ⌚

Considérons f la fonction polynomiale de degré deux dont on donne le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier.

1. Tous les nombres supérieurs à 1 ont une image positive par f .
2. Tous les nombres négatifs ont une image négative par f .
3. Il existe des nombres positifs dont l'image par f est positive.
4. Tous les nombres dont l'image par f est négative appartiennent à l'intervalle $] -\infty, -2]$.
5. Il existe des nombres dans l'intervalle $] -1, 1[$ dont l'image est négative.

★★★★☆ EXERCICE 20 (Réciproque) ⌚

Considérons f la fonction polynomiale de degré deux définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) et Δ son discriminant. Voici deux propositions :

- $\mathcal{P}_1$: " Si pour tout nombre réel x , $f(x) > 0$, alors $\Delta < 0$. "
- $\mathcal{P}_2$: " Si $ac < 0$ alors $\Delta > 0$. "

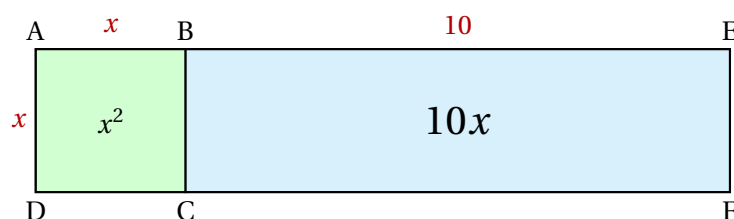
Pour chaque proposition :

- Indiquer si elle est vraie ou fausse ;
- Énoncer sa réciproque et indiquer si elle est vraie ou fausse.

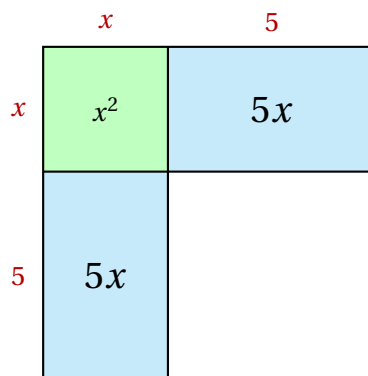
G - Problèmes

★★★★☆ EXERCICE 21 (Le problème d'Al-Khwârizmi) ⌚

1. Le mathématicien arabe **Al-Khwârizmi** imaginait que résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ revenait à trouver la longueur x telle que l'aire du rectangle $AEFD$ ci-dessous à 39.



Pour cela, il découpait le rectangle $BEFC$, en deux rectangles de dimensions 5 et x , puis effectuait, le « collage » ci-dessous,



(a) Expliquer pourquoi résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ revient à résoudre l'équation :

$$(x+5)^2 - 25 = 39$$

(b) Déterminer x .

2. (a) Résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ en calculant le discriminant.

(b) Trouve-t-on les mêmes solutions qu'à la question 1. ?

★★★★☆ EXERCICE 22 (Triangle rectangle) ⌚

L'aire d'un triangle rectangle est 429m^2 et son hypoténuse a pour longueur $h = 72,5\text{m}$. Déterminer le périmètre de ce triangle.

★★★★☆ EXERCICE 23 (Dans le plan) ⌚

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O . Considérons :

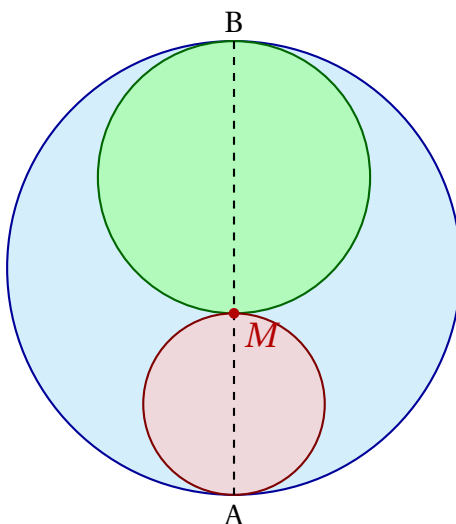
- (d) la droite d'équation : $y = 2x + 4$;
- $M(x, y)$ un point de cette droite.

Déterminer les coordonnées des points M tels que la distance OM soit égale à $\sqrt{5}$.

★★★★☆ EXERCICE 24 (Disques) ⌚

Charlotte doit créer un pendentif formé de trois disques deux à deux tangents. Le point M appartient au diamètre $[AB]$, de longueur 4cm , du grand disque.

On note x la longueur AM en cm.



1. Démontrer que l'aire, en cm^2 , de la partie bleue est :

$$D(x) = \frac{\pi(-x^2 + 4x)}{2}$$

2. Déterminer la position du point M telle que l'aire de la partie bleue soit maximum. On note cette aire $D_{\max}$.
 3. L'aire de la partie bleue du pendentif doit vérifier les contraintes :

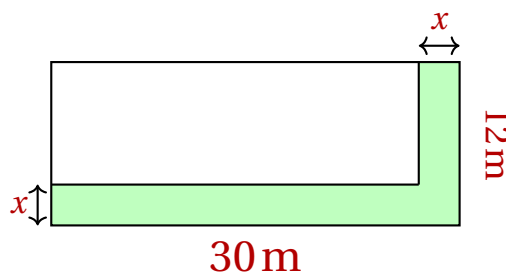
$$0,5D_{\max} \leq D(x) \leq 0,75D_{\max}$$

Où Charlotte doit-elle placer le point M ?

★★★★☆ EXERCICE 25 (Rectangle)..... (🕒)

Un terrain rectangulaire a pour longueur 30m et pour largeur 12m.

On se propose d'aménager un chemin de largeur x , en mètre, le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure ci-dessous,

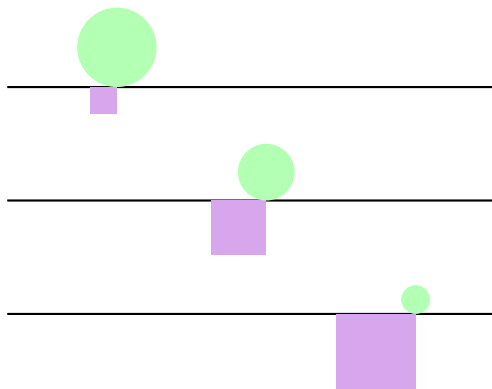


La largeur x du chemin doit être supérieure à 0,8m et on souhaite que la partie restante du terrain ait une aire supérieure à 280m^2 .

1. Indiquer un intervalle dans lequel se trouve la largeur x du chemin.
2. Vérifier que la condition sur l'aire de la partie restante se traduit par l'inéquation $x^2 - 42x + 80 \geq 0$.
3. Résoudre cette inéquation et en déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.

★★★★☆ EXERCICE 26 (🕒)

On coupe un segment de longueur 100cm en deux parties : avec la première on construit un carré et avec la seconde un cercle.

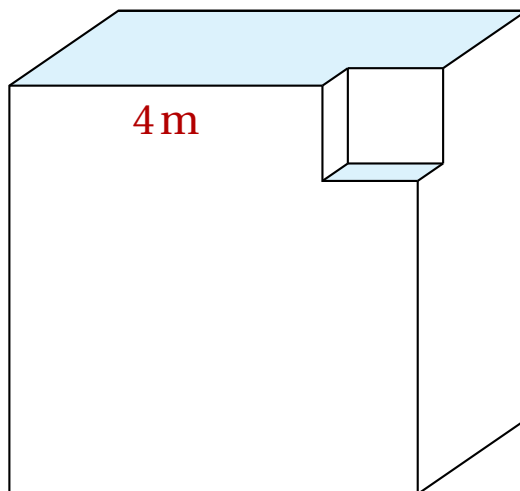


Lorsque la figure évolue de gauche à droite du segment, expliquer :

1. Comment varie l'aire du carré? L'aire du disque?
2. Comment varie la somme des deux aires?

★★★★☆ EXERCICE 27 (Cube) ⌚

À l'un de ses sommets, un grand cube a été évidé d'un petit cube pour obtenir le solide représenté ci-dessous. Ce solide a un volume de 208m^3 .



Déterminer, en mètre, l'arête du grand cube.

★★★★★ EXERCICE 28 (Défis Olympiques) ⌚

1. Le nombre d'or, noté ϕ , est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Déterminer la valeur exacte de ϕ^{2019} .
2. On considère deux types de cubes : certains ont des arêtes de x centimètres, les autres des arêtes de $x + 2$ centimètres.
Le volume d'un gros cube dépasse de 56cm^3 le volume d'un petit cube. Déterminer la longueur de l'arête d'un petit cube.

VRAI OU FAUX ?



a) Le discriminant du polynôme $2x^2 - 3x + 1$ vaut 1.

☐ ☐

b) Le discriminant du polynôme $x^2 + 4x + 5$ vaut 4.

☐ ☐

c) Le discriminant du polynôme $3x^2 + 2x - 1$ vaut 16.

☐ ☐

d) Le discriminant du polynôme $-x^2 + 6x - 9$ vaut 0.

☐ ☐

e) Le discriminant du polynôme $5x^2 - 2x + 3$ est positif.

☐ ☐

f) L'équation $x^2 + 4x + 5 = 0$ n'admet aucune solution réelle.

☐ ☐

g) L'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$ admet deux solutions distinctes.

☐ ☐

h) L'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.

☐ ☐

i) L'équation $-x^2 + 6x - 9 = 0$ admet une unique solution réelle.

☐ ☐

j) L'équation $5x^2 - 2x + 3 = 0$ admet une solution réelle.

☐ ☐

k) Les solutions de $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3.

☐ ☐

l) Les solutions de $2x^2 - 3x + 1 = 0$ sont $\frac{1}{2}$ et 1.

☐ ☐

m) La solution de $x^2 - 6x + 9 = 0$ est $x = 3$.

☐ ☐

n) Les solutions de $x^2 - 4x - 5 = 0$ sont -1 et 5.

☐ ☐



o) Les solutions de $x^2 + 2x - 3 = 0$ sont 1 et 3.

☐ ☐

p) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

☐ ☐

q) $x^2 - 9 = (x - 3)^2$.

☐ ☐

r) Le polynôme $x^2 - 5x + 6$ est positif sur $] -\infty; 2[\cup] 3; +\infty[$.

☐ ☐

s) Le polynôme $-(x - 2)^2$ est toujours positif.

☐ ☐

t) Le polynôme $x^2 + 4x + 5$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

☐ ☐

u) Le polynôme $-x^2 + 6x - 9$ est toujours négatif ou nul.

☐ ☐

v) Le polynôme $x^2 - 9$ est négatif sur $] -3; 3[$.

☐ ☐

w) L'ensemble des solutions de $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ est $] -\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.

☐ ☐

x) L'ensemble des solutions de $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ est $[2; 3]$.

☐ ☐

y) L'ensemble des solutions de $x^2 + 4x + 5 \leq 0$ est $\mathbb{R}$.

☐ ☐

z) L'ensemble des solutions de $-x^2 + 6x - 9 > 0$ est $\mathbb{R}$.

☐ ☐