CHAPITRE 1

Polynôme du second degré

Plan du chapitre

I Définitions et vocabulaires **2**
A - Fonction polynôme 2
B - Fonction polynôme du second degré 3

II Forme canonique **4**
A - Un premier exemple 4
B - Théorème 7

III Courbe représentative **8**
A - Sommet et axe de symétrie 8
B - Variations d'une fonction polynomiale du second degré 10

IV Exercices **13**
A - Fonction polynomiale 13
B - Forme canonique 13
C - Courbe représentative 14

Introduction

Au collège vous avez appris à résoudre des équations de degré un, c'est-à-dire des équations de la forme : $ax+b=cx+d$, et vous avez vu qu'une solution, si elle existe est de la forme : $x=\frac{d-b}{a-c}$. En classe de seconde vous avez prolongé ça en résolvant certaine équation de degré deux, celle qui sont de la forme équation produit nul $a(x-r_1)(x-r_2)=0$. Le but de cette année sera de savoir résoudre les équations de degré deux (ou alors de savoir assurer qu'elles n'ont pas de solution dans certains cas).

Partie I Définitions et vocabulaires

A - Fonction polynôme

Définition 1 : Fonction polynomiale

On appelle **fonction polynomiale** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ tel que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{x-1}+a_nx^n$$

où les $n+1$ nombres réels : $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés les **coefficients** de notre fonction polynôme f.
Cette forme s'appelle la **forme développée** de la fonction polynôme du seconde degré.
Dans le cas où $a_n \neq 0$, on dit que n est le **degré** de notre fonction polynôme f et on notera : $\deg(f)=n$.

À retenir : Le terme de plus haut degré en x (ayant donc un coefficient non nul) nous donne le degré de notre fonction polynôme.
C'est-à-dire : $P : x \mapsto 0x^n+x^{n-1}$ n'est pas de degré n mais de degré $n-1$ car le coefficient devant le terme de degré n est nul...

Information : On abrégera *fonction polynomiale* en **polynôme**.

Exemple :

- $P_1 : x \mapsto 5$ est une fonction polynomiale de degré 0
- $P_2 : x \mapsto 2x-7$ est une fonction polynomiale de degré 1
- $P_3 : x \mapsto -3x^7+5x^6+\pi x^4-\frac{2}{3}x^2+x^9+8$ est une fonction polynomiale de degré 9
- $P_4 : x \mapsto (x+1)(x+2)$ est une fonction polynomiale de degré 2, en effet $P_4(x)=x^2+3x+2$.

À retenir :

- Les fonctions constante, c'est-à-dire de la forme : $f : x \mapsto k$ sont des fonctions polynomiales de degré 0 ;
- Les fonctions affines, c'est-à-dire la forme : $f : x \mapsto ax+b$ sont des fonctions polynomiales de degré 1 ;
- On fera bien attention le terme de plus degré n'est pas forcément tout à gauche ou alors tout à droite de l'expression. Il faut prendre le temps de regarder tous les termes pour déterminer le degré d'un polynôme.
- Le degré d'un polynôme s'obtient à partir de la forme développé du polynôme. Il faut donc bien penser à développer l'expression de notre polynôme pour obtenir son degré.

À savoir faire 1 : Déterminer le degré d'une fonction polynomiale

Déterminer le degré de chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $P_1 : x \mapsto 7x-5+6x^8$
2. $P_2 : x \mapsto x^4+3x^3-8x^2+x^3-x^4-7x+3$
3. $P_3 : x \mapsto (x+1)(x+2)(x+3)$
4. $P_4 : x \mapsto (4x+2)^2-(7x-1)^2$

1. $\deg(P_1) = 8$
2. $\deg(P_2) = 3$
3. $\deg(P_3) = 3$
4. $\deg(P_4) = 2$

Information :

- On appelle **monôme** tout polynôme pour lequel un seul coefficient est non nul (peu importe son degré).
  Par exemple : $m : x \mapsto 9x^5$ est une fonction monôme de degré 5.
- On appelle **binôme** tout polynôme pour lequel deux coefficients sont non nuls
  Par exemple : $b : x \mapsto 5x^4 - 8x$ est une fonction binôme de degré 4.
- On appelle **trinôme** tout polynôme pour lequel trois coefficients sont non nuls
  Par exemple : $t : x \mapsto -2x^2 + x - 6$ est une fonction trinôme de degré 2.
- Et on s'arrêtera là...

B - Fonction polynôme du second degré

Définition 2 : Fonction polynomiale du second degré

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.
On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette forme s'appelle la **forme développée** de la fonction polynôme du seconde degré.
On appellera a le **coefficient quadratique** de notre fonction polynomiale de degré 2, b le **coefficient linéaire** et c le **coefficient constant**.

Information : On abrégera *fonction polynomiale du second degré* en **polynôme du second degré**, ou encore **trinôme du second degré**.

Exemple :

- $f : x \mapsto 7x^2 + 3x + 1$ est une fonction polynomiale du second degré de coefficient quadratique 7, coefficient linéaire 3 et coefficient constant 1 ;
- $g : x \mapsto x^2 - 1$ est une fonction polynomiale du second degré de coefficient quadratique 1, coefficient linéaire 0 et de coefficient constant -1 ;
- $h : x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1$ n'est pas une fonction polynomiale du second degré étant donné que $\deg(h) = 3$.

À savoir faire 2 : Reconnaître un polynôme du second degré et identifier ses coefficients

Reconnaître les polynômes du second degré et déterminer les coefficients quadratique, linéaire et constant de leur forme développée :

1. $P_1 : x \mapsto x^2$
2. $P_2 : x \mapsto 7x - 3 + x^2$
3. $P_3 : x \mapsto (2x+3)(x-1)$
4. $P_4 : x \mapsto 5x - 3$
5. $P_5 : x \mapsto x^2 - (x-1)^2$
6. $P_6 : x \mapsto (x+1)^3 - x^3$

1. P_1 est un polynôme du second degré de coefficient quadratique égal à 1, coefficient linéaire et coefficient constant égal à 0.
2. P_2 est un polynôme du second degré de coefficient quadratique égal à 1, coefficient linéaire égal à 7 et coefficient constant égal à -3.
3. $P_3(x) = 2x^2 - 2x + 3x - 3 = 2x^2 + x - 3$, ainsi P_3 est un polynôme du second degré de coefficient quadratique égal à 2, coefficient linéaire égal à 1 et coefficient constant égal à -3

4. P_4 n'est pas un polynôme du second degré car il ne possède pas de coefficient quadratique non nul.
5. $P_5(x) = x^2 - (x^2 - 2x + 1) = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2x - 1$, donc P_5 n'est pas un polynôme du second degré car il ne possède pas de coefficient quadratique non nul.
6. $P_6(x) = (x+1)\left(x^2 + 2x + 1\right) - x^3 = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$, d'où P_6 est un polynôme du second degré de coefficient quadratique 3, de coefficient linéaire 3 et de coefficient constant 1.

Partie II Forme canonique

A - Un premier exemple

L'objectif pour résoudre une équation de degré deux est de se ramener à une équation de degré un à l'aide de la propriété d'**équation produit nul**.
Par exemple sur l'équation de degré deux :

$$25x^2 - 36 = 0 \quad (E)$$

On va chercher à obtenir une équation produit nul, nous avons déjà le "*nul*" étant donné que nous avons le second membre égal à 0. Il nous faut maintenant gagner le "*produit*" car ici le membre de gauche dans notre équation (E) est une somme. Pour transformer cette somme en un produit on va chercher à **factoriser** le membre de gauche.
Factorisons notre polynôme du second degré :

$$\begin{aligned} 25x^2 - 36 &= 5^2x^2 - 6^2 \\ &= (5x)^2 - 6^2 \\ &= (5x-6)(5x+6) \end{aligned}$$

Ainsi l'équation (E) devient :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (5x-6)(5x+6) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

Ainsi $S = \left\{\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}\right\}$.
Si maintenant on s'intéresse à l'équation du second degré suivante :

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

De la même manière on va chercher à se ramener à une équation produit nul :

- Le second est déjà égal à 0 ✓ ;
- Malheureusement on a beau chercher on ne va pas réussir à factoriser notre membre de gauche (ni facteur commun, ni identité remarquable...)

Voilà qu'intervient la **forme canonique** d'une fonction polynôme du second degré, c'est une forme à partir de laquelle on peut savoir si le polynôme peut se factoriser ou non.
Cette forme est obtenue à partir d'une astuce qui consiste à rajouter un terme puis à l'ôter de façon à obtenir le début d'une identité remarquable.

Exemple :

Soit $P_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 8$,
les deux premiers termes sont $x^2 + 2x = x^2 + 2 \times x \times 1$, on reconnaît ici le début d'une identité remarquable :

$$x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = (x+1)^2$$

Ici il nous manque ce 1^2 pour avoir notre identité remarquable complète, c'est pour cela qu'on va ajouter 1^2, si on ajoute il faut le retirer pour conserver l'égalité, ainsi :

$$\begin{aligned} x^2+2x-8 &= x^2+2x+1^2-1^2-8 \\ &= (x+1)^2-9 \end{aligned}$$

On a alors : $P_1(x) = (x+1)^2-9$ qui est la forme canonique de notre fonction polynomiale.
Grâce à cette forme canonique nous allons voir si l'on peut factoriser $P_1(x)$:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (x+1)^2-9 \\ &= (x+1)^2-3^2 \\ &= (x+1-3)(x+1+3) \\ &= (x-2)(x+4) \end{aligned}$$

D'où l'équation $P_1(x) = 0$ (que l'on a défini en haut de la page) est maintenant facilement résoluble par la propriété d'équation produit nul.

Voyons sur un autre exemple, plus complexe :

Exemple :

Cherchons la forme canonique du polynôme $P_2 : x \mapsto 2x^2+3x-14$.
Dans ce cas là on remarque rapidement que le coefficient dominant (le coefficient devant le terme de plus au degré, ici le coefficient quadratique) n'est pas égal à 1 comme dans l'exemple précédent.
L'objectif ici va être de se ramener à un polynôme ayant comme coefficient quadratique 1. Pour cela on va factoriser par le coefficient quadratique :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2x^2+3x-14 \\ &= 2\left(x^2+\frac{3}{2}x-7\right) \end{aligned}$$

À partir d'ici on faire le même travail que précédemment mais avec le polynôme : $x^2+\frac{3}{2}x-7$.
De la même manière on va chercher à retrouver le début d'une identité remarquable dans :

$$x^2+\frac{3}{2}x = x^2+2\times x\times\frac{3}{4}$$

On essaye toujours de faire apparaître : `premier terme`$^2+2\times$`premier terme`$\times$`quelque chose`, ce fameux `quelque chose` (qui est là pour conserver l'égalité n'oublions pas) sera le terme manquant dans notre identité remarquable (ou plus précisement la racine du terme manquant...) Dans notre cas :

$$\begin{aligned} x^2+\frac{3}{2}x &= x^2+2\times x\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16} \end{aligned}$$

Reprenons notre polynôme et reinjection ce que l'on vient de trouver :

$$\begin{aligned} x^2+\frac{3}{2}x-7 &= \left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-7 \\ &= \left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{7\times 16}{16} \\ &= \left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9+112}{16} \\ &= \left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{121}{16} \end{aligned}$$

Nous venons d'obtenir la forme canonique de notre polynôme ayant comme coefficient quadratique 1.
Ainsi, pour notre polynôme de départ : $P_2(x)=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{121}{16}\right]=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{121}{8}$
Également, à partir de cette forme, on peut factoriser :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{121}{16}\right] \\ &= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{11^2}{4^2}\right] \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}-\frac{11}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}+\frac{11}{4}\right) \\ &= 2(x-2)\left(x+\frac{7}{2}\right) \end{aligned}$$

Et encore une fois la résolution de l'équation du second degré : $2x^2+3x-14=0$ devient trivial.

À savoir faire 3 : Déterminer la forme canonique d'un polynôme du second degré

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivant :

1. $P_1 : x \mapsto x^2-12x+5$
2. $P_2 : x \mapsto 2x^2-12x+6$

1. On a :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2-2\times x\times 6+6^2-6^2+5 \\ &= (x-6)^2-36+5 \\ &= (x-6)^2-31 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2\left(x^2-6x+3\right) \\ &= 2\left(x^2-2\times x\times 3+3^2-3^2+3\right) \\ &= 2\left((x-3)^2-9+3\right) \\ &= 2(x-3)^2-12 \end{aligned}$$

B - Théorème

Théorème 1 : Forme canonique

Soit P une fonction polynomiale de degré deux, de forme dévelopée : $P(x) = ax^2 + bx + c$ (on a alors $a \neq 0$)
P s'écrit de façon unique sous sa forme canonique :

$$\boxed{P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$$

Les coefficients α et β peuvent s'exprimer en fonction des coefficients a, b et c de la forme développée :

- $\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}}$ (à retenir) ;
- $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

On a aussi : $\boxed{\beta = P(\alpha)}$ (à retenir).

Attention : Dans un exemple concret, on n'utilisera pas cette formule difficile à mémoriser, mais on retiendra la méthode pour obtenir la forme canonique d'un polynôme du second degré à l'aide du "ajouter-retirer".

Démonstration (à connaître) :

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré deux.

- Étape 1 : On factorise par la coefficient quadratique
  Comme P est une fonction polynomiale de degré deux on sait que $a \neq 0$, ainsi pour $x \in \mathbb{R}$:
  $$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
  On se concentre alors sur le polynôme $x \mapsto x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$
- Étape 2 : On reconnaît le début d'une identité remarquable de la forme $A^2 + 2AB + B^2$
  On a :
  $$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a}$$
  On complète alors :
  $$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x &= x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \end{aligned}$$
  D'où en réinjectant dans notre polynôme de départ, on a :
  $$P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$
- Étape 3 : On réduit notre expression
  $$\begin{aligned} P(x) &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$
  On reconnaît ainsi :
  $$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

De plus on a bien :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= a(\alpha-\alpha)^2+\beta \\ &= a\times 0^2+\beta \\ &= \beta \end{aligned}$$

■

À savoir faire 4 : Déterminer les coefficients associés à la forme canonique d'un polynôme du second degré

Déterminer les coefficients α et β associé à forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivant :

1. $P_1 : x \mapsto x^2+16x$
2. $P_2 : x \mapsto -x^2+4x-5$

1. On a :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2+2\times x\times 8+8^2-8^2 \\ &= (x+8)^2-64 \end{aligned}$$

Ainsi les coefficients $\alpha=-8$ et $\beta=-64$

2. On a :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= -\left(x^2-4x+5\right) \\ &= -\left(x^2-2\times x\times 2+2^2-2^2+5\right) \\ &= -\left((x-2)^2-4+5\right) \\ &= -\left((x-2)^2+1\right) \\ &= -(x-2)^2-1 \end{aligned}$$

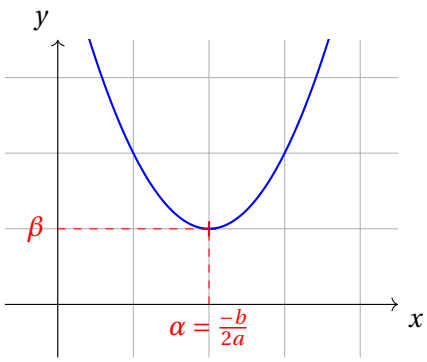
On a alors : $\alpha=2$ et $\beta=-1$

Partie III Courbe représentative

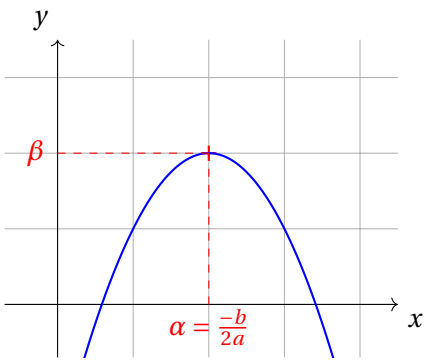
A - Sommet et axe de symétrie

Propriété 1 : Sommet et axe de symétrie de la parabole

Soit P une fonction polynomiale du second degré de forme développée : $P(x)=ax^2+bx+c$ et de forme canonique $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.
Dans un repère du plan, la courbe représentative de notre fonction polynomiale du second degré est une parabole ayant pour **axe de symétrie** la droite d'équation $x=\alpha$ et le point $\left(\alpha,\beta=P(\alpha)\right)$ est le **sommet** de notre parabole.



Cas où $a > 0$



Cas où $a < 0$

À retenir : On remarque que :

- Si $a > 0$ alors β est le minimum de P sur $\mathbb{R}$, on notera $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}(P(x)) = \beta$
- Si $a < 0$ alors β est le maximum de P sur $\mathbb{R}$, on notera $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}(P(x)) = \beta$

Exemple :

En reprenant une fonction polynomiale du second degré que l'on a déjà traité dans un exemple précédent :

$$P : x \mapsto 2x^2 + 3x - 14$$

Comme on a déjà vu : $P(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{121}{8} = 2\left(x - \left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2 - \frac{121}{8}$, on a alors :

- $a = 2 > 0$;
- $\alpha = -\frac{3}{4}$
- $\beta = -\frac{121}{8}$

Donc la droite d'équation $x = -\frac{3}{4}$ est un axe de symétrie de la parabole : $\mathscr{C}_P$. De plus, $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{121}{8}\right)$ est le sommet de la parabole $\mathscr{C}_P$ et comme $a > 0$ on peut affirmer que $-\frac{121}{8}$ est le minimum de la fonction P sur $\mathbb{R}$.

À savoir faire 5 : Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole

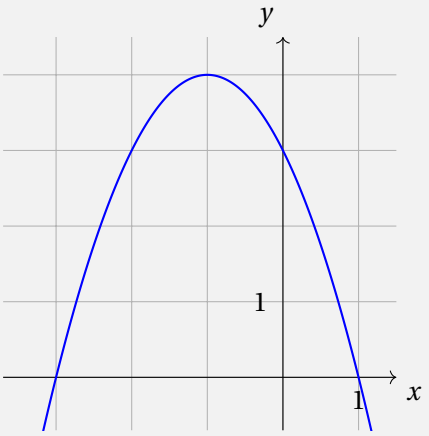
Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de chacune des paraboles suivantes :

1. $y = x^2$
2. $y = (x-3)^2$
3. $y = -x^2 + 4x - 5$

1. La forme canonique du polynôme $P(x) = x^2$ est $P(x) = (x-0)^2 + 0$ donc l'axe de symétrie est la droite d'équation : $x = 0$ et le sommet est le point de coordonnées $(0, 0)$.
2. La forme canonique du polynôme $P(x) = (x-3)^2$ est $P(x) = (x-3)^2 + 0$ donc l'axe de symétrie est la droite d'équation : $x = 3$ et le sommet est le point de coordonnées $(3, 0)$
3. On sait que la forme canonique du polynôme $P(x) = -x^2 + 4x - 5$ est : $P(x) = -(x-2)^2 - 1$ ainsi l'axe de symétrie est la droite d'équation : $x = 2$ et le sommet est le point de coordonnées : $(2, -1)$

À savoir faire 6 : Retrouver l'expression d'une fonction polynomiale à partir de son graphe

Nous représentons le graphe de P une fonction polynomiale, dans un repère orthonormé du plan.



1. Déterminer le signe du coefficient quadratique de P.
2. Déterminer $P(0)$.
3. Résoudre $P(x) = 0$.
4. Déterminons la forme canonique de P.
   (a) Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathscr{C}_P$. En déduire les coefficients α et β de la forme canonique de P.
   (b) Donner la forme canonique de P, en fonction du coefficient quadratique a.
   (c) Déterminer a et en déduire la forme canonique de P.
5. Déterminer la forme développée de P.

1. Comme la parabole est tourné vers le bas alors le coefficient quadratique est négatif.
2. On recherche l'ordonné du point de la parabole d'abscisse 0, par lecture graphique on détermine alors : $P(0) = 3$
3. On recherche les abscisses des points d'intersection entre notre parabole et l'axe des abscisses, ainsi par lecture graphique on a : $S = \{1; -3\}$
4. (a) Le sommet de la parabole est de coordonnées : $(-1, 4)$. Ainsi on a : $\alpha = -1$ et $\beta = 4$.
   (b) On obtient alors : $P(x) = a(x+1)^2 + 4$
   (c) On sait que $P(0) = 3$ donc $a + 4 = 3$ ainsi : $a = -1$.
5. Comme on sait que $P(x) = -(x+1)^2 + 4 = -\left(x^2 + 2x + 1\right) + 4 = -x^2 - 2x + 3$

B - Variations d'une fonction polynomiale du second degré

Théorème 2 : Variations

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré, de forme canonique :

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Les variations de P dépendent du signe du coefficient quadratique a et de α :

- Si $a > 0$: alors f est décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha, +\infty[$
- Si $a < 0$: alors f est croissante sur $]-\infty, \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha, +\infty[$

À retenir : On retiendra les deux tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de P	↘	β	↗

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de P	↗	β	↘

Cas où $a < 0$

Démonstration :

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré deux.
Montrons que f est décroissante (respectivement croissante) sur $]-\infty, \alpha]$ puis croissante (respectivement décroissante) sur $[\alpha, +\infty[$ si $a > 0$ (respectivement $a < 0$).

Pour cela utilisons la forme canonique de f. On sait qu'il existe α et β deux réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Considérons $a > 0$: (le cas où $a < 0$ est quasi identique)
Soit $x_1, x_2 \in]-infty, \alpha]$ tel que : $x_1 < x_2 \leq \alpha = -\dfrac{b}{2a}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
x_1 + \frac{b}{2a} &\leq x_2 + \frac{b}{2a} \leq 0 \\
\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &\geq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_- \\
a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &\geq a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{car } a > 0 \\
a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} &\geq a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \\
f(x_1) &\geq f(x_2)
\end{aligned}$$

D'où f est décroissante sur $]-\infty, \alpha]$. Regardons maintenant sur $[\alpha, +\infty[$.
Soit $x_1, x_2 \in [\alpha, +\infty[$ tel que : $\alpha \leq x_1 < x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
x_1 + \frac{b}{2a} &\leq x_2 + \frac{b}{2a} \leq 0 \\
\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &\leq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 &\leq a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{car } a > 0 \\
a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} &\leq a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \\
f(x_1) &\leq f(x_2)
\end{aligned}$$

D'où f est croissante sur $[\alpha, +\infty[$.
Montrons maintenant que, dans le cas où $a > 0$, f admet pour minimum β atteint au point d'abscisse α.
Une nouvelle utilisons la forme canonique de f. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(x-\alpha)^2 &\geq 0 \\
a(x-\alpha)^2 &\geq 0 \quad \text{car } a > 0 \\
a(x-\alpha)^2 + \beta &\geq \beta \\
f(x) &\geq \beta
\end{aligned}$$

■

Exemple :

En reprenant toujours la même fonction polynomiale du second degré qu'à l'exemple précédent :

$$P : x \mapsto 2x^2 + 3x - 14$$

Comme on a déjà vu : $P(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{121}{8} = 2\left(x - \left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2 - \frac{121}{8}$, on a alors :

- $a = 2 > 0$;
- $\alpha = -\frac{3}{4}$

Donc le tableau variations de P est :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
Variations de P		$\searrow$	$-\frac{121}{8}$	$\nearrow$	

À savoir faire 7 : Dresser le tableau de variation d'une fonction polynomiale du second degré

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $P_1 : x \mapsto -x^2 + 4x - 5$
2. $P_2 : x \mapsto 2x^2 - 12x + 6$

1. Comme le coefficient quadratique $a = -1 < 0$ alors P_1 est croissante puis décroissante, de plus on sait que $P_1(x) = -(x-2)^2 - 1$ on a alors que P_1 est croissante sur $]-\infty, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$.
2. Comme le coefficient quadratique $a = 2 > 0$ alors P_2 est décroissante puis croissante, de plus on sait que $P_2(x) = 2(x-3)^2 - 12$ on a alors que P_2 est décroissante sur $]-\infty, 3]$ puis croissante sur $[3, +\infty[$

Partie IV Exercices

A - Fonction polynomiale

★☆☆☆☆ **Exercice 1** (Degré) .....

Déterminer le degré de chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \mapsto 3x^5 + x^2 - 3$
2. $f : x \mapsto 1 + 9x + 4x^8$
3. $f : x \mapsto x^2 - 2x^4 + 6x^3$
4. $f : x \mapsto x^3 + 2x - 2$
5. $f : x \mapsto -6x^{201} + 4x102 + 8$
6. $f : x \mapsto x^2 - 2x^4 + 6x^3$

★½☆☆☆ **Exercice 2** (Polynôme ?) .....

Dire si les fonctions suivantes des fonctions polynomiales ou non? Si oui, donner le degré de ce polynôme et lorsque cela est possible donner le coefficient quadratique, linéaire et constant associé à chaque polynôme.

1. $f : x \mapsto x^2 x + 1$
2. $f : x \mapsto -\sqrt{2} + x - 3x^2$
3. $f : x \mapsto x^2 + 3\sqrt{x} - 2$
4. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + x + 1}$
5. $f : x \mapsto x^3 + 2x - 2019$
6. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3} + 9$
7. $f : x \mapsto 3x^2 - 3$
8. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 8x - 19}{15}$

★★½☆☆ **Exercice 3** (Sans développer) .....

Sans développer entièrement les expressions, donner pour chaque fonction polynômiale son degré et son coefficient dominant.

1. $f : x \mapsto (x^2 + x - 8)(x^3 - 2x^2 + x + 2)$
2. $f : x \mapsto (2x^2 + 3x + 4)(5x^5 + 3x^3 - 7x)$
3. $f : x \mapsto (x^2 - 2x^4 + 6x^3)(2x - 9)$
4. $f : x \mapsto (x^3 + 2x - 2)(-2x^5 + 6x^3 - 7x)$
5. $f : x \mapsto (-6x^{201} + 4x^{102} + 8)(x^{28} + 6x^{10} - 9)$
6. $f : x \mapsto (x^3 - 2x^2 + 1)(1 - 3x + 2x^2)$

★★★☆☆ **Exercice 4** (Et sans rien ?) .....

Soient P, Q et R trois polynômes de degrés respectifs $2, 3$ et 5. Donner le degré des polynômes PQ, PR, QR et PQR.

B - Forme canonique

★★★☆☆ **Exercice 5** (Forme canonique) .....

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynomiale, et factoriser dès que cela est possible.

1. $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$
2. $f : x \mapsto x^2 + 4x - 9$
3. $f : x \mapsto x^2 + 6x - 1$
4. $f : x \mapsto x^2 - 10x + 10$
5. $f : x \mapsto x^2 - 7x + 10$
6. $f : x \mapsto x^2 + 15x + 30$
7. $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 3$
8. $f : x \mapsto 3x^2 - x + 9$
9. $f : x \mapsto 5x^2 - 8x - 3$
10. $f : x \mapsto -5x^2 + 12x + 3$
11. $f : x \mapsto -4x^2 - 10x + 2$
12. $f : x \mapsto -2x^2 - 6x + 3$

★★½☆☆ **Exercice 6** (Coefficients) .....

Pour un polynôme P, notons : $P(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ la forme canonique de P. Donner la forme canonique et préciser les valeurs des coefficients a, α et β pour chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \mapsto 5-6(x+2)^2$
2. $f : x \mapsto 2x-3x^2-1$
3. $f : x \mapsto 4(x-3)(x+2)$
4. $f : x \mapsto -\pi x^2+2x$

C - Courbe représentative

★★☆☆☆ **Exercice 7** (Tracer) .....

Soit f une fonction polynomiale du second degré.
Tracer la représentation graphique $\mathscr{P}$ de f dans un repère orthonormé tel que :

- f admet 4 pour maximum sur $\mathbb{R}$;
- f est croissante uniquement sur $]-\infty,-2]$;
- $\mathscr{P}$ passe par le point de coordonnées $(0,3)$.

★★½☆☆ **Exercice 8** (Tableau de variations) .....

Établir le tableau de variations de chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \mapsto x^2+2x-3$
2. $f : x \mapsto x^2-7x+10$
3. $f : x \mapsto x^2+15x+30$
4. $f : x \mapsto 2x^2+4x-3$
5. $f : x \mapsto 3x^2-x+9$
6. $f : x \mapsto -5x^2+12x+3$

★½☆☆☆ **Exercice 9** (Extremum) .....

Déterminer l'extremum de chacune des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \mapsto 6(x-2)^2-7$
2. $f : x \mapsto -3(x+4)^2-2$

★★★☆☆ **Exercice 10** (Étude #1) .....

Soit $f : x \mapsto 5(x-1)^2-3$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est décroissante sur $]-\infty,1]$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

★★★☆☆ **Exercice 11** (Étude #2) .....

Soit $f : x \mapsto 2(x-3)^2-8$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la forme factorisée et sa forme développée de f.
2. Sans démonstration, donner :
   (a) l'axe de symétrie et le sommet de la parabole représentant la fonction f ;
   (b) le signe de f sur $\mathbb{R}$

★★★½☆ **Exercice 12** (Inéquation) .....

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(x-3)^2 \leq 36$
2. $3(x+1)^2 - 8 \leq 4$
3. $2(x+1)^2 - 4 \geq 10$
4. $-5(x-2)^2 \geq 10$

★★★☆☆ **EXERCICE 13** (Optimisation) .....

Soient M un point du segment $[AB]$ de longueur 1 et deux carrés de côtés respectifs $[AM]$ et $[MB]$.
Notons $AM = x$ et $A(x) = AM^2 + MB^2$

1. Exprimer $A(x)$ en fonction de x.
2. Pour quelle position du point M, $A(x)$ est minimale ?