VERS LE SUP' 2

Manipulation du symbole somme

Plan du chapitre

Introduction

La lettre majuscule grecque Σ (Sigma) , équivalente à notre lettre S. Le symbole Σ est une notation utilisée pour désigner des sommes mathématiques.

Dans tout le chapitre on notera : $[\![1\ ;\ n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$.
On admettra connu la somme de Gauss : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Partie I Abandon des points de suspension

Définition 1 : Somme

Soit $(u_k)_k$ une suite de nombres réels, on note :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Cette formule se lit : « somme, pour k variant de 1 jusqu'à k, de u indice k ».
La variable k est l'**indice de sommation**.

Exemple :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n$ (ici on vient de déployer une somme)
- $\displaystyle 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{12} = \sum_{k=0}^{12} 2^k$

À retenir : Il est essentiel de comprendre que la somme ne dépend pas de la variable de sommation k. C'est pour cette raison que la variable k est qualifiée de muette, car une fois que la somme est calculée le résultat ne dépend plus de k. On peut donc donner le nom que le veut pour notre variable de sommation.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{n} u_j = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

A - Du symbole $\sum$ aux points de suspension

À savoir faire 1 : Déployer

Déployer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{14} k =$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} nk =$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2 =$
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{14} (-4)^i =$
5. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+5} \frac{1}{2^k} =$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5^{2k} =$
7. $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} 2^{j+1} =$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} 3^{1-2k} =$

B - Des points de suspension au symbole $\sum$

À retenir : Pour pouvoir passer au symbole $\sum$, il faut trouver le "motif" qui se répète, c'est-à-dire il faut trouver l'expression générale de notre liste de réels.

Exemple :

Pour la somme $1+3+5+7+9+\ ...\ +37$, ici chaque terme est un réel de la liste $(2k+1)_{0\leq k\leq 18}$. En effet, car :

- Pour $k=0$: $2k+1=2\times 0+1=1$.
- Pour $k=1$: $2k+1=2\times 1+1=3$.

  $\vdots$
- Pour $k=18$: $2k+1=2\times 18+1=37$

Ainsi on peut écrire : $1+3+5+7+9+\ \dots\ +37=\displaystyle\sum_{k=0}^{18}(2k+1)$.

À savoir faire 2 : Chemin inverse

Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes.

1. $3^4+3^5+3^6+\ \dots\ +3^{15}=$
2. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots\ +\frac{1}{n+1}=$
3. $1-2+3-4+\ \dots\ +51=$
4. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ \dots\ +\frac{10}{1024}=$
5. $2-4+6-8+\ \dots\ +50-52=$
6. $1+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\ \dots\ +\frac{11}{1024}=$
7. $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ \dots\ +14\times 15=$
8. $4+\frac{8}{3}+\frac{16}{9}+\ \dots\ +\frac{128}{243}=$
9. $n+(n+1)+(n+2)+\ \dots\ +2n=$

C - Une somme indépendante de la variable de sommation

Soit $(u_k)_k$, une suite de réels constante égale à 1, on a alors pour tout $k\in [\![1\ ;\ n]\!]$: $u_k=1$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}u_k &= \sum_{k=1}^{n}1\\ &= \underbrace{1+1+\ \dots\ +1}_{n \text{ termes}}\\ &= n\end{aligned}$$

Il faut donc savoir déterminer le nombre d'entiers entre deux entiers.

Propriété 1 : Nombre d'entiers

Soit $n, m\in\mathbb{N}$ tel que $n\leq m$,

- Le nombre d'entiers compris entre 0 et n est : $n+1$.
- Le nombre d'entiers compris entre n et m est : $m-n+1$.

À savoir faire 3 : Calculs

Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=0}^{14} 2 =$
2. $\sum_{k=2}^{37} \frac{1}{2} =$
3. $\frac{-\sum_{k=0}^{n} 1}{2} =$
4. $\sum_{k=0}^{n} t =$

Partie II Découpage - Linéarité

A - Découpage d'une somme

Il est clair que l'on peut découper une somme en deux (voir plus) car on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} k &= 1+2+3+\ldots+100\\ &= (1+2+3+\ldots+49+50)+(51+52+\ldots+99+100)\\ &= \sum_{k=1}^{50} k + \sum_{k=51}^{100} k\end{aligned}$$

On a alors : $\sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{50} k = \sum_{k=51}^{100} k$

Propriété 2 : Relation de Chasles

Soit $(u_k)_k$ une suite, et $m \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{m} u_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k$$

À savoir faire 4 : Simplification

Simplifier les écritures, on suppose que $n > 10$.

1. $\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k =$
2. $\sum_{k=1}^{50} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k =$
3. $\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{5} a_k =$
4. $\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{10} a_k =$

★★★★☆ **EXERCICE 1** (Découpage) ....

Calculer : $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$.

Nous avons d'autres façons de découper une somme, une d'entre elles est de découper selon la parité de l'indice de sommation. C'est-à-dire on va mettre d'un côté les termes d'indices pair et de l'autre les termes d'indices impair. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n+1} u_k &= \sum_{k=0}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1}\\ &= (u_0+u_2+\ldots+u_{2n-2}+u_{2n})+(u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}+u_{2n+1})\end{aligned}$$

★★★★☆ **EXERCICE 2** (Somme alternée) ....

Calculer : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,k$.

À savoir faire 5 : Sens de variation

Étudier le sens de variation des suites $(u_n)_n$ suivantes définie chacune par :

1. Pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. Pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=1}^{n}-\frac{1}{\sqrt{k}}$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

B - Linéarité d'une somme

On retrouve les mêmes propriétés que l'addition :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\ \dots\ +(a_n+b_n)\\ &= (a_0+a_1+\ \dots\ +a_n)+(b_0+b_1+\ \dots\ +b_n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}a_k+\sum_{k=0}^{n}b_k\end{aligned}$$

On a également, pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \lambda a_k &= \lambda a_0 + \lambda a_1 + \ldots + \lambda a_n \\ &= \lambda(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k\end{aligned}$$

Propriété 3 : Linéarité

Soient $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'opérateur somme $\sum$ est linéaire, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Attention : $\sum_{k=0}^{n} (a_k + C) \neq \sum_{k=0}^{n} a_k + C$ car on a :

- $\sum_{k=0}^{n} (a_k + C) = (a_0 + C) + (a_1 + C) + \ldots + (a_n + C)$
- $\sum_{k=0}^{n} a_k + C = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + C$

À savoir faire 6 : Linéarité

1. Écrire sous la forme de deux sommes

   (a) $\sum_{k=1}^{n+1} (4 \times 5^k - k) =$

   (b) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_k - 3b_k}{7}\right) =$

   (c) $\frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{k} - 2^k\right)}{2} =$

2. Écrire sous la forme d'une unique somme

   (a) $\sum_{k=1}^{n} 4a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k =$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} + \sum_{k=2}^{n} 3k =$

   (c) $\frac{\sum_{k=1}^{n} 4k^2 + \sum_{k=2}^{n} 3k}{2} =$

Partie III Changement d'indices

Exemple :

Déployer les deux sommes suivantes. Que peut-on dire ?

- $\sum_{k=2}^{n} k =$
- $\sum_{k=3}^{n+1} (k-1) =$

Le changement d'indice consiste à renuméroter les termes d'une somme pour simplifier son expression.

Propriété 4 : Changement d'indice

L'expression à l'aide du symbole $\sum$ n'est pas unique. On peut écrire une somme avec des indices différents. On regardera uniquement le changement par translation, c'est-à-dire le changement d'indice pour $p \in \mathbb{Z}$:

- $k \to l$ où $l = k + p$
- on a alors $k = l - p$
- si $0 \leq k \leq n$ alors $p \leq l \leq n + p$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{k+p} = \sum\limits_{l=p}^{n+p} u_l$

Exemple :

Considérons la somme $\sum\limits_{k=7}^{n} 4^{k+2}$,
Si on cherche à réindicer la somme de telle sorte à ce que la somme commence à 0 on a utiliser le changement de variable : $k \to l$ où $l = k + 2$ ainsi comme $7 \leq k \leq n$ donc $9 \leq l \leq n + 2$. On a alors :

$$\sum_{k=7}^{n} 4^{k+2} = \sum_{l=9}^{n+2} 4^{l}$$

À savoir faire 7 : Réindiçage

Réindincer la somme de telle sorte à ce que le terme général de la somme soit uniquement k

1. $\sum\limits_{k=3}^{n+2} (k-2)^3 =$
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
2. $\sum\limits_{k=2}^{n+4} (2(k+1) - 5(k+2) + 6(k-1))$
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....

À retenir : Si vous voulez réduire d'une valeur p votre compteur de sommation, il faudra alors il faudra augmenter votre indice de sommation d'une valeur p. Et inversement. C'est-à-dire :

$$\sum_{k=2}^{n+2} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{k+2}$$

★★★★☆ **EXERCICE 3** (Sens de variation) ....

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_n$.

Partie IV Télescopage

Théorème 1 : Somme télescopique

Soit $(u_n)_n$ une suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

De manière plus général, on a pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$:

$$\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

À retenir : On retiendra que pour une somme télescopique, c'est-à-dire de la forme : $\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k)$ la valeur de la somme est : **dernier terme de la somme - premier terme de la somme**

***Démonstration*:**

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$.

Posons $S = \sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k)$, par linéarité on a $S = \sum_{k=p}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{n} a_k$.

En effectuant maintenant le changement d'indice $k \to l = k+1$, on a alors $\sum_{k=p}^{n} a_{k+1} = \sum_{l=p+1}^{n+1} a_l$, d'où :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l=p+1}^{n+1} a_l - \sum_{k=p}^{n} a_k \\ &= a_{n+1} - a_p \end{aligned}$$

■

★★★★☆ **EXERCICE 4** (Télescopage) ....

n cherche à calculer les sommes suivantes :

1. On considère la somme $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
   (a) Montrer que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
   (b) Calculer S.
2. On considère la somme $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
   (a) Montrer que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}$
   (b) Calculer S.
3. On considère la somme $S = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$
   (a) Montrer que $k \times k! = (k+1)k! - k!$
   (b) Calculer S.

4. On considère la somme $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
   (a) Montrer que $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$
   (b) Calculer S.

★★★★★ **EXERCICE 5** (Somme des carrés) ....

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer la valeur de la somme des premiers carrés, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)^3 - n^3$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 3n^2 + 3n + 1$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} u_k = (n+1)^3 - 1$.
4. En exprimant $\sum_{k=1}^{n} u_k$ d'une autre façon, conclure.