
Manipulation du symbole somme

Plan du chapitre

I Abandon des points de suspension	2
A - Du symbole \sum aux points de suspension.....	2
B - Des points de suspension au symbole \sum	3
C - Une somme indépendante de la variable de sommation.....	3
II Découpage - Linéarité	4
A - Découpage d'une somme.....	4
B - Linéarité d'une somme.....	5
III Changement d'indices	6
IV Télescopage	8

Introduction

La lettre majuscule grecque Σ (Sigma), équivalente à notre lettre S. Le symbole Σ est une notation utilisée pour désigner des sommes mathématiques.

Dans tout le chapitre on notera : $\llbracket 1 ; n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$.

On admettra connu la somme de Gauss : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Partie I Abandon des points de suspension

Définition 1 : Somme

Soit $(u_k)_k$ une suite de nombres réels, on note :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

Cette formule se lit : « somme, pour k variant de 1 jusqu'à k , de u indice k ».

La variable k est l'**indice de sommation**.

Exemple :

- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$ (ici on vient de déployer une somme)
- $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{12} = \sum_{k=0}^{12} 2^k$

À retenir : Il est essentiel de comprendre que la somme ne dépend pas de la variable de sommation k . C'est pour cette raison que la variable k est qualifiée de muette, car une fois que la somme est calculée le résultat ne dépend plus de k . On peut donc donner le nom que le veut pour notre variable de sommation.

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{j=1}^n u_j = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

A - Du symbole Σ aux points de suspension

À savoir faire 1 : Déployer

Déployer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{14} k =$

2. $\sum_{k=2}^{n+1} nk =$

3. $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 =$

4. $\sum_{i=0}^{14} (-4)^i =$

5. $\sum_{k=3}^{n+5} \frac{1}{2^k} =$

6. $\sum_{k=0}^n 5^{2k} =$

7. $\sum_{j=1}^m 2^{j+1} =$

8. $\sum_{k=1}^m 3^{1-2k} =$

B - Des points de suspension au symbole Σ

À retenir : Pour pouvoir passer au symbole Σ , il faut trouver le "motif" qui se répète, c'est-à-dire il faut trouver l'expression générale de notre liste de réels.

Exemple :

Pour la somme $1+3+5+7+9+\dots+37$, ici chaque terme est un réel de la liste $(2k+1)_{0 \leq k \leq 18}$. En effet, car :

- Pour $k=0$: $2k+1=2 \times 0+1=1$.
- Pour $k=1$: $2k+1=2 \times 1+1=3$.
- \vdots
- Pour $k=18$: $2k+1=2 \times 18+1=37$

Ainsi on peut écrire : $1+3+5+7+9+\dots+37 = \sum_{k=0}^{18} (2k+1)$.

À savoir faire 2 : Chemin inverse

Écrire à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes.

1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{15} =$

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} =$

3. $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 51 =$

4. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{10}{1024} =$

5. $2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50 - 52 =$

6. $1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6}{32} + \dots + \frac{11}{1024} =$

7. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 14 \times 15 =$

8. $4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \dots + \frac{128}{243} =$

9. $n + (n+1) + (n+2) + \dots + 2n =$

C - Une somme indépendante de la variable de sommation

Soit $(u_k)_k$, une suite de réels constante égale à 1, on a alors pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$: $u_k = 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}} \\ &= n \end{aligned}$$

Il faut donc savoir déterminer le nombre d'entiers entre deux entiers.

Propriété 1 : Nombre d'entiers

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq m$,

- Le nombre d'entiers compris entre 0 et n est : $n+1$.
- Le nombre d'entiers compris entre n et m est : $m-n+1$.

À savoir faire 3 : Calculs

Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=0}^{14} 2 =$

3. $\frac{-\sum_{k=0}^n 1}{2} =$

2. $\sum_{k=2}^{37} \frac{1}{2} =$

4. $\sum_{k=0}^n t =$

Partie II Découpage - Linéarité

A - Découpage d'une somme

Il est clair que l'on peut découper une somme en deux (voir plus) car on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} k &= 1 + 2 + 3 + \dots + 100 \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50) + (51 + 52 + \dots + 99 + 100) \\ &= \sum_{k=1}^{50} k + \sum_{k=51}^{100} k \end{aligned}$$

On a alors : $\sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{50} k = \sum_{k=51}^{100} k$

Propriété 2 : Relation de Chasles

Soit $(u_k)_k$ une suite, et $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^m u_k + \sum_{k=m+1}^n u_k$$

À savoir faire 4 : Simplification

Simplifier les écritures, on suppose que $n > 10$.

1. $\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k =$

3. $\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^5 a_k =$

2. $\sum_{k=1}^{50} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k =$

4. $\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=2}^{10} a_k =$

★★★★☆ EXERCICE 1 (Découpage) (↻)

Calculer : $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$.

Nous avons d'autres façons de découper une somme, une d'entre elles est de découper selon la parité de l'indice de sommation. C'est-à-dire on va mettre d'un côté les termes d'indices pair et de l'autre les termes d'indices impair. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} u_k &= \sum_{k=0}^n u_{2k} + \sum_{k=0}^n u_{2k+1} \\ &= (u_0 + u_2 + \dots + u_{2n-2} + u_{2n}) + (u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} + u_{2n+1}) \end{aligned}$$

★★★★☆ EXERCICE 2 (Somme alternée) (↻)

Calculer : $\sum_{k=0}^n (-1)^k k$.

✂ À savoir faire 5 : Sens de variation

Étudier le sens de variation des suites $(u_n)_n$ suivantes définie chacune par :

1. Pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

.....

.....

.....

.....

2. Pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

.....

.....

.....

.....

3. Pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

.....

.....

.....

.....

4. Pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=1}^n -\frac{1}{\sqrt{k}}$

.....

.....

.....

.....

B - Linéarité d'une somme

On retrouve les mêmes propriétés que l'addition :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k \end{aligned}$$

On a également, pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \lambda a_k &= \lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n \\ &= \lambda(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n a_k\end{aligned}$$

Propriété 3 : Linéarité

Soient $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'opérateur somme Σ est linéaire, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^n (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \lambda \sum_{k=0}^n b_k$$

⚠ Attention : $\sum_{k=0}^n (a_k + C) \neq \sum_{k=0}^n a_k + C$ car on a :

- $\sum_{k=0}^n (a_k + C) = (a_0 + C) + (a_1 + C) + \dots + (a_n + C)$
- $\sum_{k=0}^n a_k + C = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + C$

✂ À savoir faire 6 : Linéarité

1. Écrire sous la forme de deux sommes

$$(a) \sum_{k=1}^{n+1} (4 \times 5^k - k) =$$

$$(b) \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_k - 3b_k}{7} \right) =$$

$$(c) \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{k} - 2^k \right)}{2} =$$

2. Écrire sous la forme d'une unique somme

$$(a) \sum_{k=1}^n 4a_k + \sum_{k=1}^n a_k =$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{k}{2} + \sum_{k=2}^n 3k =$$

$$(c) \frac{\sum_{k=1}^n 4k^2 + \sum_{k=2}^n 3k}{2} =$$

Partie III Changement d'indices

Exemple :

Déployer les deux sommes suivantes. Que peut-on dire ?

- $\sum_{k=2}^n k =$
- $\sum_{k=3}^{n+1} (k-1) =$

Le changement d'indice consiste à renuméroter les termes d'une somme pour simplifier son expression.

Propriété 4 : Changement d'indice

L'expression à l'aide du symbole \sum n'est pas unique. On peut écrire une somme avec des indices différents. On regardera uniquement le changement par translation, c'est-à-dire le changement d'indice pour $p \in \mathbb{Z}$:

- $k \rightarrow l$ où $l = k + p$
- on a alors $k = l - p$
- si $0 \leq k \leq n$ alors $p \leq l \leq n + p$
- $\sum_{k=0}^n u_{k+p} = \sum_{l=p}^{n+p} u_l$

Exemple :

Considérons la somme $\sum_{k=7}^n 4^{k+2}$,

Si on cherche à réindicer la somme de telle sorte à ce que la somme commence à 0 on a utiliser le changement de variable : $k \rightarrow l$ où $l = k + 2$ ainsi comme $7 \leq k \leq n$ donc $9 \leq l \leq n + 2$. On a alors :

$$\sum_{k=7}^n 4^{k+2} = \sum_{l=9}^{n+2} 4^l$$

À savoir faire 7 : Réindication

Réindicer la somme de telle sorte à ce que le terme général de la somme soit uniquement k

1. $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3 =$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\sum_{k=2}^{n+4} (2(k+1) - 5(k+2) + 6(k-1))$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

À retenir : Si vous voulez réduire d'une valeur p votre compteur de sommation, il faudra alors il faudra augmenter votre indice de sommation d'une valeur p . Et inversement. C'est-à-dire :

$$\sum_{k=2}^{n+2} a_k = \sum_{k=0}^n a_{k+2}$$

4. On considère la somme $S = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$

(a) Montrer que $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$

(b) Calculer S .

★★★★★ EXERCICE 5 (Somme des carrés) (↻)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer la valeur de la somme des premiers carrés, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)^3 - n^3$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 3n^2 + 3n + 1$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n u_k = (n+1)^3 - 1$.

4. En exprimant $\sum_{k=1}^n u_k$ d'une autre façon, conclure.