CHAPITRE BONUS

Un peu de logique... et de rédaction !

Plan du chapitre

La contrainte et la créativité sont comme l'ombre et la lumière : l'une ne peut exister pleinement sans l'autre. Si tout est permis, alors vous n'avez pas besoin d'être créatif. C'est précisément face à une contrainte que l'esprit se met à chercher, à détourner, à inventer. Ce n'est pas un hasard si les mathématiques, reine des contraintes du point de vue de la logique, ont vu émerger des esprits célèbres non pas uniquement pour leur rigueur, mais pour leur créativité.

Introduction

Dans ce chapitre nous allons chercher un construire un manuel de survie pour tout élève d'un cours de mathématiques, peu importe le niveau, pour éviter les foudres de son professeur. Voire même d'un correcteur pour ceux qui vont passer un examen ou un concours. La logique, la construction et la rédaction d'un raisonnement est une part non négligeable de l'évaluation de tout élève faisant des mathématiques à un certain niveau. Au-delà de ça les mathématiques nécéssitent une rigueur et une logique qui sera utile dans n'importe quelle domaine de la vie, et dans la vie elle-même. Ce chapitre aura la prétention d'essayer de former de meilleur citoyen.
Les symboles mathémtaiques que vous connaissez depuis petit « + », « - »ou même « = »ne sont apparu que très récemment en comparaison à la grande histoire des mathématiques. XVème siècle pour ces symboles alors qu'Euclide (-300 av. Jésus Christ), à son époque, s'adonait tout comme nous à pratiquer notre tendre mathématique. Comment faisait-il me diriez vous? Il raisonnnait et rédigeait de manière rigoureuse pour « *mathématiquer* ». Voici un exemple de ce qu'Euclide pouvait écrire dans ses *Éléments* : « *Si on coupe un segment au hasard, le carré formé sur le segment entier est égal à ceux formés sur les deux segments du partage ajoutés à deux fois le rectangle construit sur les segments.* ». Cet énoncé long et difficile se traduit facilement de la manière suivante : « $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ».

Partie I Vocabulaires et assertions

A - Vocabulaires

Définition 1 :

- Une **définition** permet de nommer des objets mathématiques, ce qui permet d'y faire référence facilement. Elle ne se démontre pas.
- Une **assertion** est un énoncé (une phrase) mathématique pouvant être vrai ou faux.
- Un **prédicat** est une assertion dépendant d'une variable et dont la valeur de vérité dépend de cette variable.
- Un **théorème** est une assertion vraie, qui a été démontrée.
- Une **conjecture** est une assertion dont on pense qu'elle est vraie, mais qui n'a pas été démontrée (*nous sommes donc pas certain de sa véracité*).

Exemple :

- « $1 > 0$ » est une assertion vraie.
- « $3^2 = 6$ » est une assertion fausse.
- Pour n un entier, « n est pair » est un assertion dont la valeur de vérité dépend de n, c'est donc un prédicat.
- Pour A, B, C et D des points du plan : « $(AB) > (CD)$ »n'est pas une assertion car il n'y a pas de relation d'ordre entre les droites du plan.

B - Les connecteurs logiques

Définition 2 : Connecteurs logiques

Soit P une assertion.

- L'assertion « NON(P) », qu'on note également « $\neg P$ », est vraie lorsque P est fausse.
- L'assertion « P et Q », qu'on note également « $P \wedge Q$ », est vraie lorsque P et Q le sont en même temps.
- L'assertion « P ou Q », qu'on note également « $P \vee Q$ », est vraie lorsque P est vraie ou quand Q est vraie.
- L'assertion d'**équivalence** « $P \Leftrightarrow Q$ », que l'on lira « P est équivalente à Q », est vraie lorsque P et Q ont toutes les deux la même valeur de vérité.
- L'assertion d'**implication** « $P \Rightarrow Q$ » est vraie lorsque P est fausse ou Q est vraie.

Toutes ces définitions peuvent être résumer à l'aide de tables de vérités qui nous permettent de traiter tous les différents cas :

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	F	F	V	V

Propriété 1 : Implication

L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est équivalente à « $\neg P$ ou Q ».

On retiendra que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est fausse lors que « P » est vraie **et** « Q » est fausse.

Démonstration **:**

Considérons les tables de vérités des deux assertions :

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On remarque alors que les deux assertions ont la même table de vérité.

■

Dans l'implication $P \Rightarrow Q$, on dit que P est la prémisse de l'implication et Q est la conclusion de l'implication.

Nous avons plusieurs façon que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie. En voici quelques une :

- P implique Q ;
- Si P alors Q ;
- Q est vraie si P est vraie ;
- P est une condition suffisante à Q ;
- Q est une condition nécéssaire à P ;

Attention : L'implication n'est pas une abréviation d'un « donc »
À aucun moment vous n'avez vu de « donc », l'implication « $P \Rightarrow Q$ » n'est en aucun cas un raccourci pour dire « P donc Q ».
Lorsque vous écrivez « P donc Q » cela veut dire « je sais que P est vraie, j'en déduis alors que Q est vraie ».
Alors que si vous écrivez « $P \Rightarrow Q$ » vous dîtes : « je ne sais pas si P est vraie, mais je sais que si P est vraie alors Q est vraie. ».
Pour faire sens prenons deux phrases :

« *Si je suis un chat, alors je suis mortel* » **et** « *Je suis un chat donc je suis mortel* ».

Les deux phrases n'ont pas le même sens la deuxième est catégorique je suis un chat et j'en déduis que je suis mortel, alors que la première ne prétend pas savoir si je suis un chat elle affirme uniquement que si j'en suis un je suis mortel.
On fera alors attention à ne **jamais** utiliser d'implication comme abréviation d'un « donc ».

L'implication n'est pas une relation de causalité, la prémisse et la conclusion ne sont pas obligatoirement lié par un lien de causalité ou de déduction. Par exemple : « $2+2=4 \Rightarrow$ je respire » est vraie pourtant il n'y a aucun lien entre les deux.

Pour mieux comprendre le fait qu'une implication soit vraie dès lors que la prémisse est fausse.
Prenons l'exemple du code de la route, il nous assure que : « *Tout conducteur doit marquer l'arrêt absolu devant un feu de signalisation rouge, fixe ou clignotant* ».
On traduit cette règle par : « le feu est rouge $\Rightarrow$ je m'arrête », ainsi respecter le code de la route c'est rendre cette implication vraie.
On voit que, dès que la prémisse est fausse, c'est-à-dire le feu est vert, nous respectons le code de la route. En effet le code de la route n'exige rien si le feu est vert donc on ne peut pas l'effreindre.
Ainsi dès que la prémisse est fausse l'implication est vraie.

Propriété 2 : Associativité de $\wedge$ et $\vee$

Soient P, Q et R trois assertions, on a :

1. Les assertions « $(P \wedge Q) \wedge R$ » et « $P \wedge (Q \wedge R)$ » sont deux assertions équivalentes ;
2. Les assertions « $(P \vee Q) \vee R$ » et « $P \vee (Q \vee R)$ » sont deux assertions équivalentes ;

***Démonstration* :**

Dresser les tables de vérités des deux assertions.

■

Propriété 3 : Distributivités

Soient P, Q et R trois assertions, on a :

1. Les assertions « $(P \vee Q) \wedge R$ » et « $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ » sont deux assertions équivalentes ;
2. Les assertions « $(P \wedge Q) \vee R$ » et « $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ » sont deux assertions équivalentes ;

***Démonstration* :**

Dresser les tables de vérités des deux assertions.

■

C - Quantificateurs

Définition 3 : Quantificateurs

L'assertion « *pour tout* $x \in E$*,* $\mathscr{P}(x)$ » s'écrit : « $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$ ».
L'assertion « *il existe* $x \in E$ *tel que,* $\mathscr{P}(x)$ » s'écrit : « $\exists x \in E, \mathscr{P}(x)$ ».
L'assertion « *il existe un unique* $x \in E$ *tel que,* $\mathscr{P}(x)$ » s'écrit : « $\exists!\ x \in E, \mathscr{P}(x)$ ».

Le quantificateur $\forall$ est le quantificateur universel.
Le quantificateur $\exists$ est le quantificateur existentiel.

Exemple :

- « *Pour tout* x *réel, son carré est positif* » s'écrit : « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ »
- « *Il existe* x *tel que* $x+1=0$ » s'écrit « $\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0$ »
- « *La fonction* f *est constante égale à* 1 » s'écrit « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=2$ »
- « *Le polynôme* $P(X)=X+1$ *possède une unique racine réelle* » s'écrit « $\exists!\ x \in \mathbb{R},\ P(x)=0$ »

On fera attention, à l'ordre des quantificateurs. Dans une assertion l'ordre des quantificateurs l'ordre des quantificateurs a une importe clé. Regardons ça sur deux exemples :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y>0 \quad \textbf{et} \quad \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$$

La première assertion est vraie, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver $y \in \mathbb{R}$ ($y=-x+1$) tel que $x+y>0$.
Tandis que la seconde assertion est fausse il n'y aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a : $x+y>0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut considérer $y=-x$, pour lequel nous avons $x+y \leq 0$

On retiendra que dans le cas de l'ensemble vide :

- l'assertion « $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$ » est vraie ;
- l'assertion « $\exists x \in \emptyset,\ P(x)$ » est fausse ;

Application 1 : Utiliser les quantificateurs

Énoncer à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :

1. Tout nombre entier est un nombre réel ;
2. La fonction f est de signe constant sur l'intervalle $]0, +\infty[$;
3. La fonction f est périodique sur $\mathbb{R}$ (la période n'étant pas fixée) ;
4. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
5. La réciproque et la contraposée (en précisant) de la proposition :

$$\left(\exists p \in \mathbb{N}, p^2 = n\right) \Rightarrow (n \text{ n'est pas un entier premier})$$

D - Négation des assertions

Propriété 4 : Loi de la double négation

Soit P une assertion, on a que « $\neg(\neg P)$ » et « P » sont deux assertions équivalentes.

Démonstration **:**

Dresser les tables de vérités des deux assertions.

$\blacksquare$

Propriété 5 : Lois de De Morgan

Soit P et Q deux assertions.

- Les assertions « $\neg(P \vee Q)$ » et « $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ » sont équivalentes.
- Les assertions « $\neg(P \wedge Q)$ » et « $(\neg P) \vee (\neg Q)$ » sont équivalentes.

***Démonstration*:**

Dresser les tables de vérités des deux assertions.

■

Application 2 : Principe du tiers-exclus

Soit P une assertion, donner les valeurs de vérités des assertions suivantes :

1. $P \wedge (\neg P)$;
2. $P \vee (\neg P)$ (principe du tiers-exclus)

Axiome : Négation des quantificateurs

Soient X un ensemble et $P(x)$ une assertion dépendant d'un élément $x \in X$

- Les assertions « $\neg(\forall x \in X, P(x))$ » et « $\exists x \in E,\ \neg P(x)$ » sont équivalentes.
- Les assertions « $\neg(\exists x \in X, P(x))$ » et « $\forall x \in E,\ \neg P(x)$ » sont équivalentes.

En effet, on sait que pour montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in X,\ P(x)$ » est fausse il suffit de trouver un $x_0 \in X$ pour lequel $P(x_0)$ est fausse. De la même manière, mais généralement plus difficile, pour montrer qu'une propriété du type « $\exists x \in X,\ P(x)$ » est fausse il faut montrer que $\forall x \in X$ la propriété $P(x)$ est fausse.

Application 3 : Négation de proposition

1. Soient P, Q, R et S des assertions, écrire la négation des propositions suivantes :
   (a) $P \Rightarrow Q$;
   (b) $P \wedge \neg Q$;
   (c) $P \wedge (Q \wedge R)$;
   (d) $P \vee (Q \wedge R)$;
   (e) $(P \wedge Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.
2. Écrire la négation des phrases suivantes :
   (a) $\forall x \in A, \exists n \in B \ / \ x \leq n$ (le / signifie "tel que") ;
   (b) $\exists M \in A \ / \ \forall n \in B, |u(n) \leq M|$;
   (c) $\forall x \in A, \forall y \in B, xy = yx$;
   (d) $\forall x \in A, \exists y \in B \ / \ yxy^{-1} = x$
   (e) $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \ / \ \forall n \geq N, |u(n)| < \epsilon$
   (f) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ / \ \forall f \in \mathscr{F}, \forall y \in \mathbb{R}, \big(|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\big)$

Partie II Méthodologie de preuve

Dans cette partie nous allons avoir l'ambition de poser les bases d'une rédaction de preuves mathématiques. On enrichera nos bases dans la partie suivantes en voyant différents types de raisonnement logique.

A - Preuve d'une $\forall -$ assertion

Pour démontrer une assertion du type « $\forall x \in X,\ P(x)$ », nous devons prendre un élément x quelconque de X (que l'on introduira à l'aide de : « Soit $x \in X$ ») et on démontre $P(x)$

Méthodologie 1 : $\forall-$ assertion

Montrons que : $\forall x \in X,\ P(x)$.
Soit $x \in X$, montrons $P(x)$:
[*Arguments logiques ou calculs.*]
Donc $P(x)$.
Ainsi on a montré que : $\forall x \in X,\ P(x)$.

Application 4 : $\forall-$assertion

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \geq 2x$.

Propriété 6 : Utilisation d'une équivalence

Si on dispose d'un élément $x_0 \in X$ et que l'on sait que « $\forall x \in X,\ P(x)$ », alors on peut en déduire que l'assertion $P(x_0)$ est vraie.

On sait que « $\forall x \in X,\ P(x)$ ».
En particulier, pour $x = x_0 \in X$, on a $P(x_0)$.

B - Preuve d'une $\exists-$ assertion

Pour démontrer une assertion du type « $\exists x \in X,\ P(x)$ », nous devons définir explicitement un élément, judicieusement choisi, puis on démontre, dans cet ordre, que : $x \in X$ puis que $P(x)$ est vrai.

Méthodologie 2 : $\exists-$ assertion

Montrons que : $\exists x \in X,\ P(x)$.
Posons $x =$[choix judicieux] ;
-Montrons que $x \in X$:
[*Arguments logiques ou calculs.*]
Donc $x \in X$.
-Montrons $P(x)$:
[*Arguments logiques ou calculs.*]
Donc $P(x)$.
Ainsi on vient de montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $P(x)$. Ainsi on a montré que : $\forall x \in X,\ P(x)$.

Il n'est pas toujours évident de définir un élément x vérifiant ce qu'on souhaite. C'est pour cela qu'il peut nous arriver de faire appel à des théorèmes dont la conclusion est justement d'affirmer l'existence d'un élément (comme le théorème des valeurs intermédiaires) vérifiant ce que l'on souhaite, dans ce cas on oubliera pas de montrer que $x \in X$.

Application 5 : $\exists$−assertion

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}, 0 < y < x$.

Propriété 7 : Utilisation d'une existence

Si l'on sait que « $\exists x \in X,\ P(x)$ », alors on peut considérer un élément $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$ soit vraie.

On sait que « $\exists x \in X,\ P(x)$ ».
Considérons donc $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$.

C - Preuve d'une implication

Pour démontrer une implication du type « $P \Rightarrow Q$ », nous devons supposer vraie la prémisse P et démontrer la conclusion Q

Méthodologie 3 : Implication

Montrons que : $P \Rightarrow Q$.
Supposons P, montrons Q :
[*Arguments logiques ou calculs.*]
Donc Q. $(\star)$
Ainsi on a montré que : $P \Rightarrow Q$.

L'utilisation du « donc » en $(\star)$ n'est pas abusif, en effet le donc est la conclusion d'un enchaînement d'argument que l'on sait vrai, on peut conclure alors que Q est vraie.

Application 6 : Implication

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $|a-b| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-1\right)$

D - Preuve d'une équivalence

Propriété 6 : Double implication

Soit P et Q deux assertions, l'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » et « $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sont deux assertions équivalentes.

***Démonstration* :**

Dresser les tables de vérités des deux assertions.

■

Ainsi, pour démontrer une équivalence du type « $P \Leftrightarrow Q$ », nous devons montrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On appelle ça procéder par double implication.

Méthodologie 4 : Équivalence

Montrons que : $P \Leftrightarrow Q$, en procédant par double implication

($\Rightarrow$) **Sens direct**

Supposons P, montrons Q :

[*Arguments logiques ou calculs.*]

Donc Q.

Ainsi on a montré que : $P \Rightarrow Q$.

($\Leftarrow$) **Sens réciproque**

Supposons P, montrons Q :

[*Arguments logiques ou calculs.*]

Donc Q.

Ainsi on a montré que : $P \Rightarrow Q$.

Ainsi on a montré que : $P \Leftrightarrow Q$.

Il peut arriver que nous raisonnions par équivalence tout au long d'un raisonnement logique, mais ceci restera exceptionnel tant cette manière de faire est risqué. Il faut s'assurer à chaque usage d'une équivalence que l'on sait montrer le sens direct ($\Rightarrow$) et le sens réciproque ($\Leftarrow$). Il sera bien vu de justifier à chaque étape l'équivalence.
L'erreur classique du raisonnement par équivalence est dans la manipulation d'un carré ou alors d'une racine carrée. Par exemple :

$$x = 2 \not\Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 5 \not\Leftrightarrow x = \sqrt{5}$$

Application 7 : Circuit d'équivalence

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i)\ x = y$$
$$(ii)\ \forall \epsilon \geq 0,\ |x - y| \leq \epsilon$$
$$(iii)\ \forall \epsilon' > 0,\ |x - y| \leq \epsilon'$$
$$(iv)\ \forall \tilde{\epsilon} > 0,\ |x - y| < \tilde{\epsilon}$$

E - Preuve de « $P \vee Q$ »

Nous avons vu que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est équivalente à « $\neg P \vee Q$ ». On a alors que l'assertion « $P \vee Q$ » est équivalente à « $\neg P \Rightarrow Q$ ».
Pour démontrer une assertion du type « $P \vee Q$ », on montrera l'implication $\neg P \Rightarrow Q$. Pour cela on supposera $\neg P$ vraie et montrera Q.

Méthodologie 5 : $P \vee Q$

Montrons que : $P \vee Q$. Pour cela montrons que $\neg P \Rightarrow Q$.
  Supposons $\neg P$, montrons Q :
    [*Arguments logiques ou calculs.*]
  Donc Q.
Ainsi on a montré que : $P \vee Q$.

Application 8 : $P \vee Q$

Montrer l'implication suivante : $x^2 \geq 1 \Rightarrow ((x \leq -1) \vee (x \geq 1))$

Partie III Les différents types de raisonnement

A - Raisonnement par disjonction de cas

Définition 3 : Disjonction de cas

Le raisonnement par **disjonction de cas** est un raisonnement logique qui consiste à **décomposer** l'assertion à prouver en un nombre fini de cas à démontrer.

Exemple :

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{Z} : \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, par **disjonction de cas**, décomposons la preuve en deux cas :

- Si n est pair, alors $n = 2k$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $n+1 = 2k+1$. On a alors : $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$.
- Si n est impair, alors $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$. On a alors : $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)\times 2(k+1)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{Z}$.

Donc $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$.

Ainsi on a montré que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$.

Application 9 : Disjonction de cas

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 - n$ est divisible par 3.

B - Raisonnement par contraposée

Définition 4 : Contraposée

La contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication : $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
Le raisonnement par **contraposée** est un raisonnement logique qui consiste à supposer que la conclusion (que l'on souhaite montrer) est fausse pour montrer que la prémisse (que l'on suppose vraie) est fausse.

Exemple :

Montrons que pour $n \in \mathbb{Z}$: si n^2 est pair alors n est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, par raisonnement par contraposée, montrons que : si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair.

Supposons que n n'est pas pair, c'est-à-dire que n est impair.

Donc $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On a alors : $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2K+1$ où $K = 2k^2+2k \in \mathbb{Z}$

Donc n^2 est impair.

On vient alors de montrer que si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair.

Ainsi par le raisonnement par contraposée on vient de montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Application 10 : Contraposée

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que $(\forall \epsilon > 0,\ a \leq \epsilon) \Rightarrow a \leq 0$
2. Montrer que : $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a^2+b^2+c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$

On fera attention à ne pas confondre la contraposée d'une implication et la réciproque d'une implication !

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \not\Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$$

Astuce :
Lorsque l'on fait face à une implicqation ardue à démontrer, il faut avoir le réflexe de penser au raisonnement par contraposée, car la contraposée est parfois plus aisée à démontrer.

Remarque :
Même si une implication et sa contraposée sont logiquement équivalente, elles peuvent tout de même paraître psychologiquement très différentes. Par exemple :

« Toutes les bananes sont jaunes » et « Tout ce qui n'est pas jaune n'est pas une banane ».

La seconde peut paraître étrange au premier abord.

C - Raisonnement par l'absurde

Définition 5 : Absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer fausse la propriété que l'on souhaite prouver, enchaîner des arguments logiquement vraie pour finir par aboutir à une absurdité. Cela prouvera la propriété souhaité.

Exemple :

Montrons qu'il n'existe aucun entier impair divisible par 2.

Supposons par l'absurde qu'il existe un entier n impair et divisible par 2

Comme n est impair on peut alors écrire : $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Comme n est pair on peut alors écrire : $n = 2t$ où $t \in \mathbb{Z}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} & 2k+1 = 2t \\ \Leftrightarrow\ & 1 = 2(t-k) \\ \Leftrightarrow\ & 1 = 2K \text{ où} K = t-k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ce qui est **absurde** car 1 n'est pas pair.

Donc la propriété supposé au départ est fausse.

Ainsi par raisonnement par l'absurde on vient de montrer qu'il n'existe pas d'entier impair divisible par 2.

Application 11 : Absurde

Montrer que : $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a \leq b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a+c < b+d$

Attention, à ne pas confondre les raisonnements par contraposée et par l'absurde. Étant donné suppose la négation de l'assertion qu'on souhaite aboutir, mais ce sont deux modes de raisonnement différents. On va pointer trois différentes majeures :

- Objectif : Dans le raisonnement par l'absurde on souhaite montrer qu'une assertion est vraie, alors que le raisonnement par contraposée souhaite montrer une implication précise.
- Logique : Le raisonnement par l'absurde s'obtient par une absurdité logique alors que le raisonnement par contraposée s'obtient par équivalence logique.
- Contradiction : Le raisonnement par l'absurde nécessite d'aboutir à une absurdité alors que le raisonnement par contraposée non.

D - Raisonnement par équivalences

Nous avons vu que pour montrer une équivalence nous devons montrer une double implication. Dans l'immense majorité des cas, c'est le chemin à suivre. Cependant dans certain cas, on peut rédiger un enchaînement d'équivalences. On appelera cela une chaîne d'équivalence. Nous ferons ça à condition que l'équivalence est très simple, on s'assurera également de bien justifier chaque équivalence.

Exemple :

Montrons que : $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ x^2 - (a+b)x + ab = 0 \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)$

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, montrons l'équivalence souhaité.

$$\begin{aligned} x^2 - (a+b)x + ab = 0 &\Leftrightarrow (x-a)(x-b) = 0 \ \text{ par un développement du produit} \\ &\Leftrightarrow x = a \ \vee x = b \ \text{ par équation produit nul} \end{aligned}$$

Ainsi on vient de montrer que : $x^2 - (a+b)x + ab = 0 \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)$

Le fait d'écrire $P \Leftrightarrow Q$ ne prononce rien sur la valeur de vérité de P ou Q. Par exemple, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + 2 = x \Leftrightarrow 2 = 0$, l'équivalence ainsi écrite est vraie. Cependant elle ne signifie pas que l'une ou l'autre des deux assertions qui la composent le soient. Si on veut prouver que P est vraie, que l'on arrive à prouver que $P \Leftrightarrow Q$, il ne faudra pas oublier de montrer que Q est vraie.

Application 12 : Chaîne d'équivalences

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $a \neq b$, montrer que : $ab < \frac{a^2+b^2}{2}$.

E - Raisonnement par analyse-synthèse

Définition 6 : Analyse-synthèse

Le raisonnement par **analyse-synthèse** permet de démontrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant des propriétés données. Il se décompose en deux étapes :

1. L'**analyse** : on suppose que l'objet vérifiant les propriétés données existe et on essaie de trouver des conditions nécéssaires que doit vérifier cet objet.
2. La **synthèse** : On considère alors l'objet identifié dans l'étape précédente, et on vérifie qu'il a bien les propriétés souhaités au début.

Dans un raisonnement par **analyse-synthèse**, la partie d'analyse permet de nous assurer de l'unicité de (ou des) objet(s), en d'autres termes si l'objet existe alors il est nécéssairement d'une certaine forme. La partie de synthèse nous assure l'existence des objets considérés dans l'analyse.

Exemple :

Résoudre l'équation $|x+1| = 2x+3$ sur $\mathbb{R}$.

Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} & |x+1| = 2x+3 \\ \Rightarrow\ & (x+1)^2 = (2x+3)^2 \text{ en élévant au carré} \\ \Rightarrow\ & 3x^2+10x+8 = 0 \text{ en développant} \end{aligned}$$

En remarquant que -2 racine évidente de notre polynôme, d'après les formules coefficients-racines on a que $-\frac{4}{3}$ est la seconde racine de notre polynôme.

Ainsi le bilan de l'analyse est : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x+1| = 2x+3 \Rightarrow x \in \left\{-2; -\frac{4}{3}\right\}$. C'est-à-dire nous venons de montrer l'inclusion de l'ensemble des solutions de notre équation dans l'ensemble $\left\{-2; -\frac{4}{3}\right\}$.

Synthèse : Vérifions si -2 et $-\frac{4}{3}$

- On a $|-2+1| = 1 \neq -1 = 2\times(-2)+3$. Donc -2 n'est pas solution de notre équation.
- On a $|-\frac{4}{3}+1| = \frac{1}{3} = 2\times\left(-\frac{4}{3}\right)+3$. Donc $-\frac{4}{3}$ est solution de l'équation.

Bilan : L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

Nous insisterons bien sur le fait que : résoudre une équation, c'est démontrer une équivalence, avec la difficulté supplémentaire que l'une des deux assertions n'est pas donné mais à déterminer. C'est ce que nous permet de déterminer le raisonnement par analyse-synthèse. Dans l'exemple précédent nous avons démontré l'équivalence :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(|x+1| = 2x+3 \Leftrightarrow x \in \{-\tfrac{4}{3}\}\right)$$

Ainsi pour résoudre une équation, on évitera au maximum d'utiliser des équivalences, sauf cas très simple (opération niveau collège).

Application 13 : Analyse-synthèse

Résoudre sur $[-2, +\infty[$: $\sqrt{x+2} = x$

F - Raisonnement par récurrence

F.1 - Récurrence simple

Définition 6 : Récurrence

Le raisonnement par **récurrence** permet de démontrer, en tois étapes, qu'une propriété $P(n)$, dépendant de $n \in \mathbb{N}$ (donc un prédicat), est vraie pour une infinité d'entiers naturels n.

Voici une analogie avec votre capacité à monter un escalier.

Étape	*Escalier*	*Raisonnement par récurrence*
Initialisation	Je peux atteindre la marche 0	La propriété $P(0)$ est vraie
Hérédité	Pour un entier naturel n fixé, si j'ai atteint la marche n alors je peux atteindre la marche la suivante $n+1$	Pour un entier naturel n fixé, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion	Pour tout entier $n \geq 0$, je peux atteindre la marche n	Pour tout entier $n \geq 0$, on a $P(n)$ vraie

- La propriété qui permet de déduire la ***Conclusion*** à partir de l'***Initialisation*** et de l'***Hérédité***, c'est-à-dire celle qui nous permet ce passage à une infinité de terme, s'appelle l'**axiome de récurrence**. C'est un axiome, donc on ne le démontre pas.
- On peut initialiser un raisonnement par récurrence à partir d'un d'un entier naturel n_0 que l'on souhaite. La propriété sera alors démontré pour tout entier $n \geq n_0$.

Axiome 1 : Axiome de récurrence

Soit une propriété $P(n)$ dépendant de l'entier naturel n telle que :

- ***Initialisation :*** $P(n_0)$ est vraie pour un entier naturel n_0 ;
- ***Hérédité :*** pour un entier $n \geq n_0$ fixé, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Méthodologie 6 : Récurrence simple

• Pour un entier $n \geq n_0$, on considère la propriété $P(n)$: "..."
Montrons que pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$.
• ***Initialisation :*** Pour $n = n_0$, montrons que $P(n_0)$ est vraie.

[Arguments ou calculs]

• ***Hérédité :*** Soit $n \geq n_0$, supposons que $P(n)$: "..." est vraie. Montrons que $P(n+1)$: "..." est vraie.

[Arguments ou calculs]

On en déduit que $P(n+1)$ est vraie.
• ***Conclusion :*** La propriété $P(n)$ a été initialisée à l'entier naturel n_0 et elle est héréditaire donc d'après l'axiome de récurrence elle est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - 5$.
Démontrons par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est majorée par 5.
Pour un entier $n \geq 0$, on considère la propriété : $P(n)$: "$u_n \leq 5$"
Initialisation : Pour $n = 0$, montrons que : $P(0)$: "$u_0 \leq 5$" est vraie.
Comme $u_0 = 1 \leq 5$, ainsi $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geq 0$, supposons que $P(n)$: "$u_n \leq 5$" est vraie. Montrons que : $P(n+1)$: "$u_{n+1} \leq 5$" est vraie.
Comme :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 5 \\ &\leq 2 \times 5 - 5 \quad \text{car } u_n \leq 5 \\ &\leq 5 \end{aligned}$$

On en déduit que $P(n+1)$: "$u_{n+1} \leq 5$ est vraie.
Conclusion : La propriété $P(n)$ a été initialisée à l'entier naturel $n = 0$ et elle est héréditaire donc d'après l'axiome de récurrence elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Application 12 : Raisonnement par récurrence

On admet que la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$, est n dérivable sur $\mathscr{D}$ pour tout entier $n \geq 1$.
Montrer, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \neq 0$, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Voici quelques remarques importantes sur le raisonnement par récurrence, ce raisonnement est fréquemment utilisé mais il souffre parfois de manque de rigueur ce qui mène à de nombreuses erreurs.

- Définir clairement la propriété $P(n)$ est primordial. Elle doit dépendre de l'entier n, en particulier elle ne peut pas commencer par un « $\forall n$ » (elle ne dépendrait plus de n...)
- Différencier l'hypothèse de récurrence $P(n)$, que l'on suppose vraie pour un entier naturel n fixé, et la $\forall-$assertion : « $\forall n \geq n_0,\ P(n)$ », que l'on cherche à démontrer à l'aide du raisonnement par récurrence.
- Vérifier que dans la phase d'hérédité vous utilisez bien l'hypothèse de récurrence (c'est-à-dire la propriété $P(n)$ que l'on suppose vraie), si ce n'est pas le cas c'est que la récurrence est inutile. Vous pouvez alors relever la démonstration en faisant une preuve directe, en fixant un entier $n \geq n_0$ en début de preuve.
- Vous ne prouvez jamais une propriété dépendant d'un nombre réel x. Par exemple prouver la $\forall-$assertion : « $\forall x \geq 1,\ P(x)$: "$\frac{1}{x} \leq 1$" » par récurrence est impossible. On rappel que le raisonnement par récurrence se base sur l'axiome de récurrence qui utilise une propriété dépendant d'un entier naturel n !

Cherchez l'erreur !
Nous allons "prouver" par récurrence que : « Dans n'importe quelle trousse, tous les crayons ont la même couleur ». Cet assertion est évidemment fausse, mais regardons ce raisonnement par récurrence. Pour $n \geq 1$, notons la propriété :

$$P(n) : \text{"Dans toute trousse de } n \text{ crayons, tous les crayons ont la même couleur"}$$

• ***Initialisation :*** Pour $n = 1$, montrons que $P(1)$: "Dans toute trousse de 1 crayon, tous les crayons ont la même couleur" est vraie.
C'est évidemment vrai, dans une trousse d'un crayon ils ont tous la même couleur.
• ***Hérédité :*** Soit $n \geq 1$, supposons que $P(n)$ est vraie. C'est-à-dire que dans toute trousse de n crayons, tous les crayons ont la même couleur (hypothèse de récurrence). Montrons que $P(n+1)$ est vraie, pour cela prenons une trousse de $n+1$ crayons. Notons les : $C_1, C_2, ..., C_n, C_{n+1}$.
Considérons deux sous trousses :
Trousse A : $C_1, C_2, ..., C_n$. Il y a n crayons donc d'après l'hypothèse de récurrence ils ont tous la même couleur.
Trousse B : $C_2, ..., C_n, C_{n+1}$. Il y a n crayons donc d'après l'hypothèse de récurrence ils ont tous la même couleur.
Comme dans les deux sous trousses il y a un crayon en commun les deux trousses ont des crayons qui ont tous la même couleur.
D'où toute trousse de $n+1$ crayons, a une seule et même couleur. • ***Conclusion :*** *On vient alors de montrer que pour tout $n \geq 1$ toute trousse de n crayons, tous les crayons ont la même couleur.*
Le raisonnement paraît legit, pourtant on sait que c'est évidemment faux. D'où vient l'erreur ?
Cet exemple montre un aspect trop souvent oublié, c'est que lors de la phase d'hérédité il faut vérifier que tous les arguments sont vrais pour tout $n \geq 1$. Or ici l'argument « comme dans les deux sous trousses il y a un crayon en commun les deux trousses ont des crayons qui ont tous la même couleur. » n'est pas vrai pour $n = 2$. L'implication $P(1) \Rightarrow P(2)$ est fausse, il n'y a pas de sous-recouvrement non disjoint entre les deux trousses.

F.2 - Récurrence multiple à pas fixé

Pour commencer, regardons le cas d'une récurrence double. C'est une légère variation du raisonnement par récurrence simple mais cette fois pour prouver la propriété $P(n+1)$, nous avons non seulement besoin de savoir que $P(n)$ est vraie (comme dans le simple) mais aussi que $P(n-1)$ soit vraie.

Méthodologie 7 : Récurrence double

• Pour un entier $n \geq n_0$, on considère la propriété $P(n)$: "..."
Montrons que pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$.
• ***Initialisation :*** Pour $n = n_0$, montrons que $P(n_0)$ **et** $P(n_0+1)$ sont vraies.

[Arguments ou calculs]

• ***Hérédité :*** Soit $n \geq n_0$, supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies. Montrons que $P(n+2)$: "..." est vraie.

[Arguments ou calculs]

On en déduit que $P(n+2)$ est vraie.
• ***Conclusion :*** La propriété $P(n)$ a été initialisée aux rangs n_0 et n_0+1 et elle est héréditaire donc par le principe de récurrence double elle est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Application 13 : Raisonnement par récurrence double

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_1 & = 3 \\ u_{n+2} & = 3u_{n+1} - 2u_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 2^n + 1$.

- La récurrence double est particulièrement utile pour l'étude de ce type de suites, qui sont définies elles-mêmes par une récurrence double.
- Le principe de la récurrence double (et même multiple à pas fixé) est de faire une récurrence simple sur l'assertion $H(n)$: "$P(n) \wedge P(n+1)$". En pratique personne ne fait ça, même si on voit bien que la récurrence double est un cas particulier de la récurrence simple.
- Ce principe se généralise à des récurrences triples, quadruples etc...

Propriété 7 : Récurrence multiple à pas fixé.

Soit $P(n)$ un prédicat dépendant d'un entier naturel n et soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

- ***Initialisation :*** $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+k)$ soient vraies ; (initialisation multiple !)
- ***Hérédité :*** pour un entier $n \geq n_0$ fixé, si $P(n)$ **et** $P(n+1)$ **et**... **et** $P(n+k)$ sont vraies alors $P(n+k+1)$ est vraie

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Démonstration **:**

On réalise un raisonnement par récurrence simple sur la propriété : $H(n)$: "$P(n) \wedge P(n+1) \wedge \ldots \wedge P(n+k)$".

$\blacksquare$

F.3 - Récurrence forte

Cette fois-ci, il s'agit d'une récurrence où pour prouver la propriété $P(n+1)$, on a besoin de savoir que toutes les propriétés $P(n), P(n-1), \ldots, P(n_0+1), P(n_0)$ soient vraies.

Méthodologie 8 : Récurrence forte

• Pour un entier $n \geq n_0$, on considère la propriété $P(n)$: "..."
Montrons que pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$.
• ***Initialisation :*** Pour $n = n_0$, montrons que $P(n_0)$ est vraie.

[Arguments ou calculs]

• ***Hérédité :*** Soit $n \geq n_0$, supposons que : $\forall k \in [\![n_0, n]\!]$, $P(k)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$: "..." est vraie.

[Arguments ou calculs]

On en déduit que $P(n+1)$ est vraie.
• ***Conclusion :*** La propriété $P(n)$ a été initialisée au rang n_0 et elle est héréditaire donc par le principe de récurrence forte elle est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Application 14 : Raisonnement par récurrence forte

Montrer que tout entier $n \geq 2$ est un produit (éventuellement d'un seul facteur) de nombres premiers.

Propriété 8 : Récurrence forte.

Soit $P(n)$ un prédicat dépendant d'un entier naturel n, on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

- ***Initialisation :*** $P(n_0)$ soit vraie ;
- ***Hérédité :*** pour un entier $n \geq n_0$ fixé, **si** $\forall k \in [\![n_0, n]\!], P(k)$ est vraie **alors** $P(n+1)$ est vraie

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

***Démonstration* :**

On réalise un raisonnement par récurrence simple sur la propriété : $H(n)$: "$\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ P(k)$". ■