
Développement, factorisation

Plan du chapitre

I Développement	2
A - Distributivité	2
B - Identités remarquables	2
C - Méthode (cas d'une distributivité simple et d'une distributivité double)	3
II Factorisation	3
A - Facteur commun	3
B - Identités remarquables	4
C - Méthode	5
D - Factoriser à l'aide des racines d'un polynôme	6
E - Division euclidienne de polynôme	9
III Exercices	13
A - Développement	13
B - Factorisation	13

Introduction

Dans ce chapitre nous allons revoir brièvement les méthodes de développement et pousser davantage l'étude de la factorisation des polynômes à l'aide notamment de ses racines et découvrir la division euclidienne de polynômes.

Partie I Développement

Définition 1 : Développer

Développer un produit, c'est transformer un produit en une somme.

A - Distributivité

Propriété 1 : Simple et double distributivité

Soient a, b, c, d et k des nombres réels :

- **Simple distributivité** : $k \times (a + b) = ka + kb$

- **Double distributivité** : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple :

- $2(5x - 1) = 2 \times 5x + 2 \times (-1) = 10x - 2$

- $(2x + 3)(4x - 1) = 2x \times 4x + 2x \times (-1) + 3 \times 4x + 3 \times (-1) = 8x^2 - 2x + 12x - 3 = 8x^2 + 10x - 3$

B - Identités remarquables

Propriété 2 : Identités remarquables de développement

Soient a et b deux nombres réels, on a :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

🔪 À savoir faire 1 : Développer et réduire une expression littérale

1. $(2x + 5)^2 = \dots\dots\dots$

2. $(7x - 3)^2 = \dots\dots\dots$

3. $(5x - 4)(5x + 4) = \dots\dots\dots$

4. $2a^2 - 3(a - 5) + (3a - 1)^2 = \dots\dots\dots$

.....

.....

.....

5. $(7x - 6)(7x + 6) - (4x + 3)^2 = \dots\dots\dots$

.....

.....

.....

.....

C - Méthode (cas d'une distributivité simple et d'une distributivité double)

À retenir : Pour développer on suit les priorités opératoires, pour éviter certaines erreurs courantes chez les "neo-développeurs" on peut prioriser la double distributivité à la simple, même si on gardera en temps qu'il n'y a pas de priorité entre les deux.

Erreur fréquente : Pour ceux qui ne veulent pas écouter le conseil précédent voici ce qu'il ne faut surtout pas faire :

~~$$k(a + b)(c + d) = (ka + kb)(kc + kd)$$~~

Voici ce qu'il faut faire :

$$k(a + b)(c + d) = (ka + kb)(c + d)$$

Ou alors :

$$k(a + b)(c + d) = (a + b)(kc + kd)$$

À savoir faire 2 : Développer et réduire une expression littérale

- $2(x + 5)(2x - 3) =$

- $-3(2x + 3)(5 - 3x) =$

Partie II Factorisation

Définition 2 : Factoriser

Factoriser une somme, c'est transformer une somme en un produit.

A - Facteur commun

Propriété 3 : Facteur commun

Soient a, b et k des nombres réels, on a la factorisation suivante :

$$ka + kb = k(a + b)$$

À retenir : La factorisation c'est mettre ce qui est redondant en facteur, c'est-à-dire en prenant une phrase :

Zakary va chercher du pain, puis Zakary va chercher sa soeur puis Zakary va chercher un colis

Dans cette phrase c'est le groupe de mots *Zakary va chercher* qui est redondant. Pour alléger la phrase en français on dirait plutôt :

Zakary va chercher du pain, puis sa soeur, puis un colis

Exemple :

- $12x - 4 = 4 \times 3x + 4 \times (-1) = 4(3x - 1)$

- $9x^2 - 6x = 3 \times 3x^2 + 3 \times (-2x) = 3(3x^2 - 2x)$.

Ici nous n'avons pas factorisé au maximum, nous pouvons encore factoriser l'un des deux facteurs!

$$9x^2 - 6x = 3(3x^2 - 2x) = 3(x \times 3x + x \times (-2)) = 3 \times x(3x - 2) = \boxed{3x(3x - 2)}$$

Nous avons bien factorisé au maximum car nous ne pouvons factoriser aucun des deux facteurs présent.

Information : Le deuxième point de l'exemple on aurait pu tout de suite remarquer que $3x$ était un facteur commun des deux termes de l'expression littéral.

À savoir faire 3 : Factoriser à l'aide d'un facteur commun

1. $16x - 4 = \dots\dots\dots$
2. $-48 + 16x = \dots\dots\dots$
3. $27x^2 + 9x = \dots\dots\dots$
4. $x^2y + 2x = \dots\dots\dots$
5. $x^2yz + y^2z^3 = \dots\dots\dots$

B - Identités remarquables

Propriété 4 : Identités remarquables de factorisation

Soient a et b deux nombres réels, on a les factorisations suivantes :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Point chaud : On remarque que ce sont juste les identités remarquables de développement lu de droite à gauche! Donc pas de panique il n'y en a pas six à apprendre mais seulement trois à savoir lire dans les sens. Cette faculté de savoir lire les égalités de gauche à droite mais aussi de droite à gauche est une faculté très importante qu'on travaillera tout au long de l'année.

Exemple :

- $4x^2 + 49 + 28x = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 6^2 = (2x + 7)^2$

- $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x - 3)^2$

- $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x - 5)(3x + 5)$

À savoir faire 4 : Factoriser à l'aide d'identités remarquables, mais pas que...

1. $4x^2 + 9 - 12x = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

$$2. 16x^2 - 25 = \dots\dots\dots$$

$$3. 9a^3 - 12a^2 + 4a = \dots\dots\dots$$

$$4. (7x+2)^2 - (4x+2)^2 = \dots\dots\dots$$

C - Méthode

Pour **factoriser** une expression littérale on peut suivre la méthode suivante :

- **Y a-t-il un facteur commun ?**

- Si oui, on factorise par le facteur commun;
- Sinon, **y a-t-il une identité remarquable?**
 - Si oui, on factorise via l'identité remarquable;
 - Sinon, on va "**scinder**" l'étude sur chacun des termes de notre expression. On va factoriser à part chaque terme en repartant du début de cette méthode.

On n'oublie pas de réduire chaque facteur et de se poser la question :

- **A-t-on factorisé au maximum?** En faisant l'étude de chaque facteur de notre expression factorisée.

Exemple :

Factorisons l'expression littérale : $A = (2x - 1)^2 - (5x + 1)(6x - 3) + (8x^2 - 2)$ On suit la méthode énoncée précédemment :

- Nous n'avons pas de facteur commun sur l'expression globale;
- Nous ne repérons aucune identité remarquable de factorisation sur l'expression globale;
- Nous allons alors scinder l'étude sur chaque terme de l'expression, factorisons chacun des termes :
 - $(2x - 1)^2$ est déjà factorisé au maximum car aucun facteur commun ni identité remarquable de factorisation...
 - $(5x + 1)(6x - 3) = (5x + 1)(3 \times 2x + 3 \times (-1)) = (5x + 1) \times 3(2x - 1) = 3(5x + 1)(2x - 1)$
 - $2 \times 4x^2 + 2 \times (-1) = 2(4x^2 - 1) = 2(2^2x^2 - 1^2) = 2((2x)^2 - 1^2) = 2(2x - 1)(2x + 1)$
- L'expression à factoriser est alors : $(2x - 1)^2 - 3(5x + 1)(2x - 1) + 2(2x - 1)(2x + 1)$
On reprend alors la méthode du début :
 - On a bien un facteur commun : $(2x - 1)^2 - 3(5x + 1)(2x - 1) + 2(2x - 1)(2x + 1)$.
On peut alors factoriser l'expression par $2x - 1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} (2x - 1)[2x - 1 - 3(5x + 1) + 2(2x + 1)] &= (2x - 1)[2x - 1 - 15x - 3 + 4x + 2] \\ &= (2x - 1)[-9x - 2] \end{aligned}$$

- **Attention!** N'oublions pas de se poser la question suivante : peut-on encore factoriser un des facteurs?

Ici c'est le cas, $2x - 1$ est factorisé au maximum, mais $-9x - 2$ est factorisable par -1 .

- En effet : $-9x - 2 = -1 \times 9x + (-1) \times 2 = -1(9x + 2) = -(9x + 2)$

Ainsi nous avons $A = -(2x - 1)(9x + 2)$ qui est l'expression factorisée au maximum de A .

✂ À savoir faire 5 : Factoriser à l'aide de la méthode

$$2(x-2)(x+1) + (x^2-4) - 3(1-x)(4-2x) = \dots\dots\dots$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

D - Factoriser à l'aide des racines d'un polynôme

Théorème 1 : Factorisation

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.

Le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ se factorise éventuellement de la façon suivante :

- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de notre polynôme;
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de notre polynôme;
- Si $\Delta < 0$, alors notre polynôme n'a pas de forme factorisée sur \mathbb{R} .

Exemple :

En reprenant l'exemple suivi tout au long du chapitre, factorisons le trinôme : $-2x^2 + 3x - 1$.

On a vu que $\Delta = 1 > 0$, donc notre polynôme est bien factorisable. De plus, nous avons vu qu'il admettait deux racines réelles distinctes qui sont :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

On obtient alors la forme factorisée suivante :

$$-2x^2 + 3x - 1 = -2(x - 1) \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

✂ Erreur fréquente : Il ne faut pas oublier de mettre le coefficient quadratique en facteur!

✂ À savoir faire 6 : Factoriser des polynômes du second degré

Factoriser dans \mathbb{R} les polynômes suivants :

1. $P_1 : x \mapsto 3x^2 + 11x - 4$

.....

.....

2. $P_2 : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$

3. $P_3 : x \mapsto 2x^2 + 5x + 6$

Théorème 2 : Lien coefficients-racines

Deux réels u et v sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ si, et seulement si, ces deux réels ont pour somme $u + v = S$ et pour produit $uv = P$

Exemple :

Considérons le polynôme du second degré définie par $f(x) = 2x^2 + x - 3$.

- D'une part : 1 est une racine que l'on appellera évidente, car :

$$f(1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$S = 1 + x_2 \quad \text{et} \quad P = 1 \times x_2 = x_2$$

où S et P sont respectivement la somme et le produit des racines de f .

- Or on vient de voir que l'on a :

$$\begin{cases} 1 = -2 \times S \\ -3 = 2 \times P \end{cases}$$

$$\text{Donc } -3 = 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}$$

On détermine ainsi facilement la seconde racine de notre polynôme.

✂ À savoir faire 7 : Utiliser le lien coefficients-racines

Déterminons les racines de la fonction polynomiale du second degré définie par $P(x) = x^2 + 4x - 5$

1. Trouver une racine évidente de notre polynôme.

.....

2. En utilisant le lien coefficients-racines, déterminer la seconde racine de notre polynôme.

.....

3. Factoriser P .

.....

💡 À retenir : Le dernier théorème est particulièrement utile pour gagner du temps sur la détermination des racines d'un polynôme du second degré. Si notre polynôme possède une racine que l'on nommera : évidente (qu'on limitera à de 0, 1, -1, 2 ou -2) nous pouvons facilement déterminer la seconde racine de notre polynôme. Dans ce genre cas, il n'est pas très utile de sortir l'artillerie lourde avec le discriminant et le calcul des racines, il est parfois plus rapide de remarquer une racine évidente et d'en déduire la seconde racine à l'aide du lien coefficients-racines.

Nous avons vu dans le dernier exemple, un exemple du sens direct du théorème, c'est-à-dire, nous cherchons deux réels (potentiellement égaux) qui sont solutions d'une certaine du second degré. Pour ça on utilise les coefficients de notre polynôme du second degré pour nous aider à résoudre cette équation.

Voyons maintenant un exemple du sens indirect du théorème, cherchons deux réels qui ont pour somme S et produit P alors pour cela nous allons résoudre une certaine équation.

Exemple :

Résolvons le système, que l'on appelle somme-produit, suivant :

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ xy = 210 \end{cases}$$

Pour que deux nombres x et y aient pour somme 29 et produit 210, il faut et il suffit que ces deux nombres soient solution de l'équation $x^2 - 29x + 210 = 0$.

Le calcul du discriminant s'avère positif, il existe donc deux réels ayant pour somme 29 et pour produit

.....

.....

.....

.....

.....

Partie III Exercices

A - Développement

★★☆☆☆ EXERCICE 1 (Développement #2) (1)

Développer et réduire les expressions suivantes :

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|--------------------------|
| 1. $(3x+8)^2 + (2x-7)^2$ | 3. $(7x+5)^2 + (4x-1)(3x-8)$ | 5. $(6x+1)^2 - (x+2)^2$ |
| 2. $(7x-6)(7x+6) - (4x+3)^2$ | 4. $(4x-3)^2 - 2(x+1)$ | 6. $(5x+6)^2 - (3x-1)^2$ |

★★★☆☆ EXERCICE 2 (Rigueur) (1)

Développer et réduire les expressions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $4x + x[3 - x(7 - x)] - 2x[4x - (x - 2)]$ | 3. $(2x - 3)(2x + 3) - (x + 5)(x - 5)$ |
| 2. $5(3x - 1)(2x + 3) - 3(2x + 3)(5 - 3x) + 2x + 3$ | 4. $(2x + 1)(2x - 1) - 3(x - 5)^2$ |

B - Factorisation

★★★☆☆ EXERCICE 3 (Factorisation #1) (1)

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $(2x+5)(7x-3) + (6x+4)(2x+5)$ | 10. $25x^2 - 16 - (2x+3)(5x-4)$ |
| 2. $(x+7)(3x-8) - (2x+1)(3x-8)$ | 11. $(5x-8)^2 + 10x - 16$ |
| 3. $(2x+5)^2 + (2x+5)(3x-9)$ | 12. $(7x+5)(3x-4) - 7x - 5$ |
| 4. $(9x-4)(5x+6) - (9x-4)(3x+11)$ | 13. $9x^2 - 24x + 16 - (2x+1)^2$ |
| 5. $(3x-7)^2 - 16$ | 14. $7x^3 + 14x^2 + 21x$ |
| 6. $25x^2 - (x+2)^2$ | 15. $x^2y - xy^2 + 2x^2y^2$ |
| 7. $(6x-5)^2 - (4x-3)^2$ | 16. $49a^2 - 70ab + 25b^2$ |
| 8. $(7x-3)^2 - (7x-3)(4x+6)$ | 17. $121x^2 - 49a^2b^2$ |
| 9. $4x^2 - 28x + 49 + (5x-3)(2x-7)$ | |

★★★☆☆ EXERCICE 4 (Factorisation #2) (1)

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. $(2x-1)^2 - (5x+1)(6x-3) + (8x^2-2)$ | 3. $2x^2 - 2 + 5(x-1)^2 - 20$ |
| 2. $2(x-2)(x+1) + (x^2-4) - 3(1-x)(4-2x)$ | 4. $2x^2 - 2 + 5(x-1)^2 - 20$ |

★★★☆☆ EXERCICE 5 (Calculs) (1)

Sans calculatrice, calculer :

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|----------------------|
| 1. $10\,0001^2 - 9\,999^2$ | 2. $35 \times 215 + 35 \times 785$ | 3. 996×1004 |
|----------------------------|------------------------------------|----------------------|

★★★☆☆ EXERCICE 6 (Factorisation #3) (1)

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

1. $x^3 + x^2 - 4x - 4$

2. $4x + 4y - xz^2 - yz^2$

3. $20xy - 8x - 15y + 6$

4. $-6xy + 2x + 15y - 5$

★★★★☆ EXERCICE 7 (Factorisation #4) (1)

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

1. $16 - x^4$

2. $x^8 - 1$

3. $x^4 + 4x^2 + 4$

4. $-12x^3 + 8x^2 + 3x - 2$

5. $x^5 + x^4 - x - 1$

★★★★☆ EXERCICE 8 (Simplification) (1)

Simplifier au maximum les expressions quotients suivantes, on ne souciera pas de leur domaine de définition.

1. $\frac{(x-3)^2 + x^2 - 9}{x-3}$

2. $\frac{-2x+3+(x-2)(2x+3)}{4x^2+12x+9}$

3. $\frac{x^2-16}{(x-2)(x+4)}$

4. $\frac{x^4-1}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}$

★★★★☆ EXERCICE 9 (Lien coefficients-racines) (1)

Factoriser au maximum avec les expressions suivantes :

1. $x^2 + \frac{3x}{2} - \frac{5}{2}$

2. $x^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$

3. $4x^2 + 20x - 56$

4. $\frac{3x^2}{2} - 9x - 24$

5. $-3x^3 - 6x^2 + 3x + 6$

6. $2x^5 - 10x^3 + 8x$

★★★★☆ EXERCICE 10 (Système somme - produit) (1)

Résoudre les systèmes suivant :

1. $\begin{cases} x+y=64 \\ xy=24 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=-8 \end{cases}$

★★★★☆ EXERCICE 11 (Division euclidienne de polynômes) (1)

Donner le quotient et le reste dans la division euclidienne de :

1. $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ par $X - 1$

2. $3X^4 - 5X^3 + X - 1$ par $X^2 - X + 2$

★★★★☆ EXERCICE 12 (Factorisation #5) (1)

Factoriser au maximum avec les expressions suivantes :

1. $4x^3 + 24x^2 + 45x + 25$

2. $4x^3 - 4x^2 - 8x + 8$

3. $x^3 - \frac{x^2}{2} - 8x + \frac{15}{2}$

4. $-x^3 + 6x^2 + (\sqrt{2} + 7)x + \sqrt{2}$